I 24773

... 2022

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL XX.

ANUL 1940—1941

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

TIMIȘOARA
INSTITUT DE ARTE GRAFICE „TIPOGRAFIA ROMANEASCĂ"
1941

I 24773

ANUL XX MARTIE 1940 No. 1.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **O. N. TINO:** TEOREME DE GEOMETRIE CONSECINTE ALE APLICATIUNILOR TRIGONOMETRIEI PATRATICE.
2. **EUGEN VISA:** FUNCTIUNI PSEUDO-HIPERBOLICE. STUDIU ELEMENTAR.
3. NOTE MATEMATICE: 1, 2.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 444, 1699, 1700, 1703.
6. PROBLEME PROPUSE: 1826-1832.
7. INFORMATIUNI.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

2467

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebuie să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile, din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ȚIȚEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ștefan Nadașan** (Laboratorul de Rezistența Materialelor), Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii și cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN, Școala Politechnică, Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este pentru anul XX, de 200 (două sute) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIX inclusiv, broșate, 120 lei fiecare.

Revista Matematică din Timişoara, apare sub conducerea unui comitet compus din:

1. **Abason E.** Inginer, Doctor în Matematici, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti
2. **Abramescu N.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
3. **Adam D. R.** Sublt. de geniu, str. M Cogălniceanu 31, Bucureşti.
4. **Adamescu M.** Licenţiat în Matematici, Inspector Financiar, str. Flondor 37, Cernăuţi.
5. **Alaci V.** Doctor în Matematici, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
6. **Almăjan P.** Locot., Licenţiat în matematici, str. Zaharia 23. Bucureşti.
7. **Anastasiade I.** Inginer, Profesor de Material Rulant de cale Ferată, înzestrarea căilor ferate, întinderea exploatării, la Şc. Polit., Timişoara.
8. **Andronescu P.** Doctor-Inginer, Profesor de Electrotechnică la Şc. Polit., Timişoara.
9. **Angheluţă Th.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
10. **Ardeleanu Şt.** Inginer, Subdirector la Şcoala Sup. de Arte şi Meserii, Asistent pe lângă catedra de Technologie, Şc. Polit., Timişoara.
11. **Arghir I.** Profesor la Liceul din Tg.-Jiu.
12. **Baidaff B. I.** Doctor în Matematici, Buenos Aires, Republica Argentina (Avenida ne Mayo 560).
13. **Bakony C.** Inginer, Profesor de Technologie la Şc. Polit., Timişoara.
14. **Balazs D.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Geometrie Descriptivă dela Şc. Polit., Timişoara, str. Gen. Joffre 12.
15. **Bănărescu M.** Inginer, Director la Atelierele C. F. R., Profesor la Catedra de Maşini Termice dela Şc. Polit., Timişoara, str. Doja 51.
16. **Banciu I.** Prof., Directorul „Casei de Depuneri", str. Lucaci 95, Bucureşti.
17. **Bărglăzan A.** Inginer, Conferenţiar la Maşini Hidraulice, dela Şc. Polit., Timişoara.
18. **Baron C.** Şef de lucrări la catedra de Fizică dela Şc. Politechnică, Timişoara.
19. **Blaşian V.** Inginer de Mine, Profesor la catedra de Exploatări Miniere dela Şc. Polit., Timişoara.
20. **Bobârnac M.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Maşini Termice dela Şc. Polit., Timişoara.
21. **Bonea I.** Inginer, Profesor la Topografie şi Geodezie, Şcoala Politechnică, Timişoara.
22. **Botez M.** Doctor în Matematici, Directorul Şcoalei Superioare de Comerţ din Piatra-Neamţ.
23. **Botez M.** Profesor la Şc. Normală şi Liceul Milit., str. Speranţei 12, Iaşi.
24. **Bratu Gh.** Doctor în Matematici, Profesor la catedra de astronomie dela Universitatea din Cluj.
25. **Buiciiu Gh.** General de Artilerie. Fost 10 ani profesor de Geometrie Analitică la Şcoala Politechnică din Timişoara. Însărcinat cu conferinţa de Balistică Exterioară la Şcoala Politechnică din Bucureşti, str. M. Cogălniceanu 10, Bucureşti II
26. **Câlniceanu C.** Inginer, Conferenţiar, Asistent pe lângă catedra de Organe de Maşini la Şc. Polit., T-şoara.
27. **Cândea C.** Doctor-Inginer, Profesor şi membru în Comitetul de Direcţie la Şc. Polit. din Timişoara.
28. **Catona V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Măsuri Electrice la Şc. Polit. din Timişoara.
29. **Claudian Virgil,** Profesor la liceul Mihai Viteazul din Bucureşti.
30. **Coca A.** Licenţiat în Litere, Lector de Limba engleză la Şc. Polit. din Timişoara.
31. **Coman A.** Profesor liceul „C. Diaconovici-Loga", Profesor onorific la Şc. Politchnică din Timişoara.
32. **Comănescu A.** Licenţiat în Matematici, Profesor la liceul din T.-Măgurele.
33. **Constantinescu G. G.** Licenţiat în Matematici, Bucureşti.
34. **Constantinescu Gh.** Profesor la lic. Lazăr, Bucureşti.
35. **Contrea A.** Doctor în Ştinţele Naturale, Asistent pe lângă catedra de Mineralogie şi Petrografie dela Şc. Polit., Timişoara.
36. **Costăchescu V. C.** Căpt. de Marină, Constanţa.
37. **Cristescu I.** Inginer, Profesor la Şcoala Politechnică, Timişoara.
38. **Cristodulo N.** Licenţiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie dela Şc. Polit., Timişoara.
39. **Cserveny I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Centrale Electrice dela Şc. Polit., Timişoara.
40. **Curea I.** Profesor de matematici la liceul din Cluj şi astronom la Observatorul Universităţii.
41. **Demetrescu Gh.** Doctor în Matematici, Subdirector la Observatorul Astronomic din Bucureşti.
42. **Diaconescu N.** Profesor la liceul din Slatina.
43. **Dobrozemsky M.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Exploatări Miniere dela Şc. Polit., Timişoara.
44. **Dumitriu-Dæda,** Profesor la Colegiul Carol I, Craiova.
45. **Florescu M.** Inginer Inspector Silvic, str. A. Orescu 9, Bucureşti.
46. **Frătici I.** Inginer Asistent pe lângă catedra de Cazane, dela Şc. Politechnică, Timişoara.
47. **Georgescu D.** Profesor la Liceul din Piteşti.
48. **Gheorghiu V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Hidraulică dela Şc. Polit., Timişoara.
49. **Gheorghiu Th. Gh.** Doctor în Matematici, Asistent pe lângă catedra de Analiza Matematică dela Şc. Politechică din Bucureşti, Profesor la liceul Schewitz-Thierrin, Str. Vatra Luminoasă No. 55, Bucureşti IV.
50. **Ghermănescu M.** Doctor în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică, Directorul Şcoalei P. T. T., Timişoara.
51. **Ghiţescu Spiridon,** Profesor secundar, Mizil.
52. **Hristea H.** Inginer-Inspector General la C. F. R.,
53. **Gloden A.** Doctor în Matematici, Profesor à l'Athénée, Rue Jean Jaurés 11, Luxembourg. Bucureşti.
54. **Ionescu-Biss P. H.** Licenţiat în Matematici.
55. **Ionescu Bujor C-tin.** Licenţiat în Matematici, Profesor, str. Maior Popescu Gh. 26. Bucureşti.
56. **Ionescu-Ţiu D. C.** Locot., Licenţiat în Matematici, Calea Griviţei 158, Bucureşti.
57. **Ivănescu Cezar,** Profesor liceul militar, Târgovişte.
58. **Kielburger M.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Electrotechnică dela Şc. Polit., Timişoara.

59. **Kühn I.** Doctor în Chimie, Asistent pe lângă Catedra de Chimie Generală dela Şc. Polit., Timişoara.
60. **Lambrino Gh.** Doctor în Drept şi Economie Politică, Conferenţiar de Economie Politică şi Legislaţie Industrială la Şc. Polit., Timişoara.
61. **Laţiu V.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor la Catedra de Mineralogie şi Petrografie dela Şcoala Polit., Timişoara.
62. **Leonida D.** Inginer, Prof. la Şc. Polit., Timişoara.
63. **Linteş I.** Maior de Artilerie, str. Epicol 49, Bucureşti.
64. **Liteanu Gh.** General de Artilerie, Str. Carageale
65. **Lupan A.** Inginer, Prof. la Şc. Polit din Timişoara. 30, Bucureşti.
66. **Macovski Eug.** Doctor în chimie, Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Timişoara.
67. **Manughevici C.** Inginer-chimist, şef de Lucrări la Şcoala Politechnică, Timişoara.
68. **Mardan D.** Inginer inspector general, Directorul Fabricei de tutun. Prof. la Şc. Polit., din Timişoara.
69. **Mărculescu Origen,** Profesor la Colegiul „Carol I", Craiova.
70. **Marinescu I.** Doctor-Inginer. Conferenţiar la Şc. Politechnică din Timişoara.
71. **Mateescu S.** Doctor în Ştiinţele Naturale. Profesor la Catedra de Geologie dela Şc. Polit. din Timişoara.
72. **Mereuţă Emilian.** Licenţiat în Matematici, Str. Vatra Luminoasă 89, Bucureşti IV.
73. **Mihaiu Edith,** ingier, asistentă la Şcoala Politechnică din Timişoara.
74. **Mihăileanu N. N.** Profesor secundar. Bucureşti.
75. **Miloia I.** Doctor în Litere şi Istoria Artelor, Asistent pe lângă catedra de Geometrie Discriptivă dela Şcoala Polit., Timişoara.
76. **Mioc V.** Licenţiat în Matematici, Inspector şcolar, Asistent pe lângă catedra de Analiza Matematică dela Şc. Polit., din Timişoara.
77. **Murgulescu Elena.** Licenţiată în Matematici, Asistentă la Şcoala Polit. din Timişoara.
78. **Murgulescu G. I.** Doctor în chimie. Conferenţiar la Şc. Polit., din Timişoara.
79. **Nadaşan Şt.** Doctor-Inginer, Asistent pe lângă catedra de Rezistenţa Materialelor dela Şc. Polit., Timişoara.
80. **Naneş Gh.** Profesor la lic. Sf. Sava, Bucureşti.
81. **Nicolau A.** Inginer, Profesor la Şc. Polit., din Timişoara.
82. **Nicolau P.** Inginer, Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.
83. **Ogrin N.** Doctor în Ştiinţele Comerciale, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara.
84. **Onicescu O.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, str. Clopotarii Vechi 25, Bucureşti.
85. **Orăşeanu C.** Inginer-şef, Licenţiat în Matematici, Profesor la Şcoala Politechnică, Bucureşti.
86. **Orşeanu Gr.** Profesor secundar, Bucureşti.
87. **Patriciu Valeriu.** Doctor, Profesor la catedra de Geologie Economică şi Zăcăminte, la Şcoala Politechnică, Timişoara.
88. **Petrescu A.** Profesor la Academia Agricolă, Bucureşti.
89. **Popescu E.** Doctor în chimie, Profesor la Şcoala Politechnică, Bucureşti.
90. **Popescu I.** Inginer, Profesor de Maşini Miniere şi Decan la Şc. Polit. din Timişoara.
91. **Protopopescu I.** Inginer-Şef, Profesor la Şcoala Polit. din Timişoara.
92. **Purcariu I.** Doctor în Fizică, Prof. la Academia Comercială, Bucureşti.
93. **Raeliş N. R.** Doctor în Matematici, Directorul Institutului Matematic Român, Profesor, Bucureşti.
94. **Rădulet R.** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Şcoala Politechnică din Timişoara.
95. **Roibănescu C.** Profesor, Bucureşti.
96. **Sauciuc L.** Licenţiat în chimie, Asistent pe lângă Catedra de Chimie dela Şc. Polit. din Timişoara.
97. **Savin C. Ion.** Licenţiat în Matematici, str. Sărăriei 56, Iaşi.
98. **Schileru I.** Inginer, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara, Directorul Şcoalei P. T. T., Timişoara.
99. **Scărlătescu D.** Inginer, Asistent la Şcoala Politechnică din Timişoara, profesor la liceul industrial.
100. **Scorpan Al.** Inginer, depoul C. F. R., Asistent la Şcoala Politechnică, Timişoara.
101. **Sergescu P.** Doctor în Matematici, Licenţiat în Filozofie, Profesor la Universitatea din Cluj.
102. **Severineanu C.** Inginer-Şef, Inspectorul Tracţiunii C. F. R., Profesor la Şcoala Politechnică, Timişoara.
103. **Simionescu Gh. D.** Licenţiat în Matematici, Profesor la lic. Militar din Târgovişte.
104. **Smighelschi O.** Inginer la Fabrica „Nitrogen", Dicio-Sân-Martin.
105. **Stamatescu I.** Profesor la Liceul „Matei Basarab" şi „Seminarul Pedagogic Universitar", Bucureşti.
106. **Stambuleanu A.** Doctor-Inginer la CFR., Timişoara.
107. **Stan A.** Locotenent de Artilerie, licenţiat matematici, Cluj.
108. **Stăncescu C.** Doctor-Inginer, Profesor la Şc. Polit. din Timişoara.
109. **Stantzel E.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Construcţii dela Şc. Polit., Timişoara.
110. **Stoicescu L.** Inginer, Conferenţiar la Elemente de Maşini şi Cursul General de Maşini dela Şcoala Politechnică din Timişoara.
111. **Stoicescu M.** Profesor la lic. „G. Lazăr", Bucureşti.
112. **Teodorescu C.** Inginer-Şef, Profesor la Şcoala Politechnică din Bucureşti.
113. **Teodosiu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Academia de Agricultură din Cluj.
114. **Ţino O.** Doctor în Matematici, Profesor la Catedra de Geometria Analitică dela Şc. Polit., Timişoara.
115. **Vâlcovici V.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, Preşedinte al Consiliului de perfecţionare al Şcoalei Politechnice din Timişoara, Str. Londra 44. Bucureşti.
116. **Vescan T.** Doctor în Matematici şi Licenţiat în Ştiinţe Fizice, preparator al Institutului de Fizică teoretică şi aplicată al Universităţii din Cluj.
117. **Viciu Aurel.** Profesor la lic. Milit., Tg.-Mureş.
118. **Vişa Eugen.** Licenţiat în Matematici, Profesor la liceul Militar, Târgu-Mureş, Str. Gojdu No. 5.
119. **Vlad I. V.** Inginer-Architect, Profesor la Şc. Polit. din Timişoara.
120. **Vlădescu I.** Doctor-Inginer, Conferenţiar la Şcoala Polit. din Timişoara.
121. **Zăgănescu I.** Inginer la C. F. R. şi Asistent la Şc. Polit., Timişoara.
122. **Zaharia N. O.** Profesor la lic. Militar, Tg.-Mureş.
123. **Zapan Gr.** Cpt. Comandor-Aviator, Inginer, Comandantul Şcoalei de Ofiţeri de Aviaţie „Carol II", Str. Elefterie 18, Bucureşti.

ANUL XX — No 1 TIMISOARA, MARTIE 1940

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

TEOREME DE GEOMETRIE CONSECINȚE ALE APLICAȚIUNILOR TRIGONOMETRIEI PATRATICE.

DE O. N. ȚINO
(PROFESOR)

In No. 11, Anul XIX. din *Revista Matematică din Timișoara,* Domnul profesor *V. Alaci* generalizează *transformarea patratică* și *antipatratică* dată de D-sa în interesanta sa lucrare: *„Trigonometria patratică“*, ocupându-se în primul rând de *transformarea rombică* și *transformarea rombică iterată.* Rezultatul analitic îl face să observe că ordinea în care se obține transformatele iterate rombice $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ pentru rezultatul final este indiferentă, fapt care îl conduce la enunțarea următoarei probleme: *Dacă avem un punct* A *și-l transformăm rombic, întâi de unghiurile* (φ_1, φ_2) *și apoi de unghiurile* (φ_2, φ_1), *obținem în ambele cazuri același punct transformat* B. (Vezi pag. 145). Apoi la aceeași pagină observă că proprietatea se păstrează pentru *transformatul iterat rombic de ordinul n.*

Problema de care se ocupă aci D-l profesor *V. Alaci,* degajată de transformarea rombică, este o problemă interesantă de geometrie pură elementară, pe care o putem enunța subt forma:

Intr'un triunghiu isoscel A O A′ ($\sphericalangle$ A′ = $\sphericalangle$ A) *două drepte* A B, A D *taie latura* O A′ *respectiv în* B, D, *iar paralelele duse prin* B *și* D *la* A A′ *taie pe* O A *în* B′ *și* D′. *Dreptele* B′ X *și* D′ Y, *paralele respectiv cu* A D *și* A B, *se întâlnesc pe* O A′.

Să presupunem că dreptele B′ X și D′ Y nu se întâlnesc pe O A′, și ca urmare că B′ X taie pe O A′ în M, iar D′ Y taie pe O A′ în M′. Pentru a demonstra proprietatea enunțată, trebue să arătăm, că punctele M și M′ sunt confundate în același punct, adică segmentul M M′ are ca măsură zero.

Să considerăm în acest scop triunghiurile D′ M′ D și B′ B A. Observăm în primul rând că

(1) $$\sphericalangle M' D' D = \sphericalangle B' B A$$

având:

$$D' M' \parallel A B; \quad D' D \parallel B' B,$$

ambele perechi de sens contrar; apoi unghiurile M′ D D′ și B B′ A sunt suplimentare. (Fig. 1).

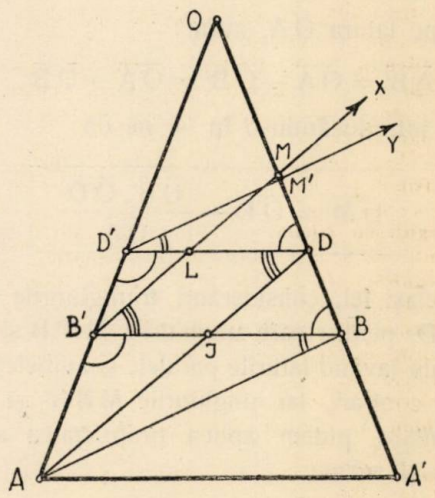


Fig. 1.

Alăturând prin urmare cele două triunghiuri, astfel ca latura B B′ să se aștearnă în lungul lui D′ D cu punctul B în D′, latura comună devenind bisectoarea unghiului M′ D′ A, latura B′ A devine paralelă cu M′ D (Fig. 2). In acest fel avem proprietatea cunoscută, care generalizează proprietatea bisectoarei într'un triunghiu, anume:

(2) $$\frac{\overline{D M'}}{\overline{A B'}} = \frac{\overline{D' M'}}{\overline{A B}}.$$

Insă în triunghiul A O B, dreapta D′ M′ fiind paralelă la A B, avem:

(3) $$\frac{\overline{D'M'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OD'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}},$$

căci

$$\overline{OD'} = \overline{OD};$$

urmează comparând (2) cu (3), că:

(4) $$\frac{\overline{DM'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}}.$$

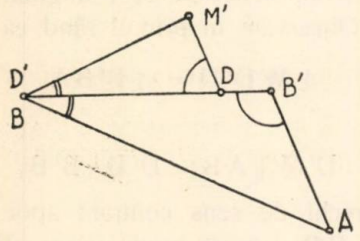


Fig. 2.

Insă pe latura OA, avem:

(5) $$\overline{AB'} = \overline{OA} - \overline{OB'} = \overline{OA} - \overline{OB},$$

pe care introducându-o în (4) ne dă:

(6) $$\boxed{\overline{DM'} = \overline{OD} - \frac{\overline{OB}.\overline{OD}}{\overline{OA}}}.$$

In acelaşi fel, considerând triunghiurile B'MB şi D'AD, pentru care unghiurile MB'B şi D'DA sunt egale (având laturile paralele şi ambele perechi de sens contrar), iar unghiurile MBB' şi DD'A suplimentare, putem aplica proprietatea amintită mai sus şi avem:

(7) $$\frac{\overline{BM}}{\overline{AD'}} = \frac{\overline{B'M}}{\overline{AD}}.$$

Dar în triunghiul AOD, dreapta B'M fiind paralelă la AD, avem relaţiile:

(8) $$\frac{\overline{B'M}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}},$$

deci comparând (7) cu (8), deducem, observând încă că $\overline{AD'} = \overline{OA} - \overline{OD'} = \overline{OA} - \overline{OD}$, că:

(9) $$\boxed{\overline{BM} = \overline{OB} - \frac{\overline{OB}.\overline{OD}}{\overline{OA}}}.$$

Observăm pe *fig. 1*, că $\overline{BM} - \overline{DM'} = \overline{BD} \pm \overline{MM'}$ (după cum presupunem că M este între M' şi A, sau că M' este între M şi A); dealtă parte, din relaţiile (6) şi (9) deducem:

$$\overline{BM} - \overline{DM'} = \overline{OB} - \overline{OD} = \overline{BD}.$$

Comparând cele două expresiuni ale diferenţei $\overline{BM} - \overline{DM'}$ rezultă că:

$$\overline{BD} = \overline{BD} \pm \overline{MM'},$$

egalitate care n'are loc de cât în cazul când măsura segmentului MM' este *nulă*, adică când punctele M şi M' sunt confundate în acelaşi punct.

b) In cazul general, dacă în triunghiul isoscel AOA' ducem prin A segmentul AB limitat la OA' şi $\overline{BB'}$ paralel la A'A, apoi segmentul B'C limitat la OA' şi $\overline{CC'}$ paralel la $\overline{A'A}$, şi aşa mai departe, ultimul segment determinând pe latura OA' punctul M (cele *n* segmente limitate la latura OA' formând unghiurile date arbitrar $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ cu latura AO) şi dacă facem din nou aceeaşi construcţie cele *n* segmente corespunzând aceloraşi unghiuri cu latura AO însă luate în altă permutare, obţinem pe latura OA' acelaşi punct M.

Proprietatea această generală poate fi demonstrată din aproape în aproape prin procedeul inducţiei complecte.

In adevăr, proprietatea este demonstrată pentru două segmente corespunzând unghiurilor cu OA date arbitrar φ_1, φ_2. Ea rezultă imediat pentru trei segmente. Fie M punctul determinat pe OA' de succesiunea segmentelor AB, B'C, C'M formând cu OA respectiv unghiurile $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Cu aceste trei unghiuri $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ avem în total încă cinci permutări:

$$\varphi_1, \varphi_3, \varphi_2; \quad \varphi_2, \varphi_1, \varphi_3; \quad \varphi_2, \varphi_3, \varphi_1;$$
$$\varphi_3, \varphi_1, \varphi_2; \quad \varphi_3, \varphi_2, \varphi_1.$$

Când considerăm succesiunea segmentelor corespunzătoare permutării $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_2$, demonstraţia revine la a arăta că proprietatea este adevărată pentru succesiunea de două segmente corespunzătoare unghiurilor φ_2, φ_3 în triunghiul isoscel BOB'; deci pentru segmentele în succesiune corespunzând unghiurilor $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_2$ avem acelaşi punct M ca pentru $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Pentru segmentele în succesiune formând cu O A unghiurile $\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3$, avem acelaşi punct C ca în primul drum), deci acelaşi punct M; etc.

In cazul general, observăm că, dacă schimbăm primele două unghiuri într'o permutare a unghiurilor $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ care dă punctul M, avem acelaşi punct A_2 pe O A', şi ca urmare celelalte segmente corespunzătoare unghiurilor $\varphi_3, \varphi_4, \ldots, \varphi_n$ păstrându-se, avem acelaşi punct M pentru noua permutare. Asemenea, dacă permutarea diferă de una din acele care dau punctul M prin ordinea ultimelor două unghiuri φ_{n-1}, φ_n, proprietatea se reduce la cazul, demonstrat mai sus, a două segmente în succesiune. Aşadar, presupunând că proprietatea a fost demonstrată pentru succesiunea de $(n-1)$ segmente, ea rezultă pe baza lemelor precedente şi în cazul succesiunii de n segmente. Deci proprietatea este generală.

Reciprocă: *Teorema celor trei paralele.*

Dacă, în triunghiul isoscel A O A', *avem segmentul* A B *limitat la latura* O A', *apoi* $\overline{BB'}$ *paralel la* A' A *şi segmentul* B' M *limitat la latura* O A', *ducând prin* A *segmentul* A D *paralel la* B' M *şi limitat la* O A', *apoi* $\overline{DD'}$ *paralel la* A' A, *dreapta* D' M *este paralelă la* A B.

Demonstraţia acestei proprietăţi reciproce este imediată, dacă folosim raţionamentul reducerii la absurd. In adevăr, presupunând că D' M n'ar fi paralelă cu A B, atunci paralela D' M' la A B ar tăia pe O A' într'un punct distinct de punctul M, ceea ce este în contrazicere cu teorema directă demonstrată la început.

Observarea I. Insemnând cu I şi L punctele de intersecţie ale perechilor de drepte (A D, B B') şi (B' M, D D'), observăm că triunghiurile A I B şi D' L M sunt omotetice, având D' L $\parallel$ I B; L M $\parallel$ A I; D' M $\parallel$ A B. Ca urmare, dreapta I L trece prin punctul de întâlnire al dreptelor A M, D' B.

Observarea II. *Dintre cele două drumuri care merg de la* A *la* M, *anume* A B B' M *şi* A D D' M, *acela, care corespunde segmentului cu care* A O *face unghiul cel mai mic, este drumul cel mai mic.*

Să presupunem $\widehat{BAO} < \widehat{DAO}$. Avem pe figură B' I D L un paralelogram (laturile opuse două câte două paralele), deci $\overline{ID} = \overline{B'L}$; $\overline{IB'} = \overline{DL}$. Insemnând cu d diferenţa drumurilor A B B' M şi A D D' M, avem:

$$(10)\quad d = (\overline{AB} + \overline{BI} + \overline{IB'} + \overline{B'L} + \overline{LM}) - (\overline{AI} + \overline{ID} + \overline{DL} + \overline{LD'} + \overline{D'M}) = (\overline{AB} - \overline{AI}) - (\overline{D'M} - \overline{LM}) + (\overline{BI} - \overline{LD'}).$$

Triunghiurile A I B şi D' L M fiind asemenea, avem:

$$(11)\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{D'M}}{\overline{LM}},$$

şi aplicând o proprietate a proporţiilor, obţinem:

$$(12)\quad \frac{\overline{AB} - \overline{AI}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{D'M} - \overline{LM}}{\overline{D'M}},$$

sau încă:

$$(13)\quad \frac{\overline{AB} - \overline{AI}}{\overline{D'M} - \overline{LM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{D'M}} = \left(\frac{\overline{AO}}{\overline{D'O}}\right) > 1;$$

apoi din aceleaşi triunghiuri, avem şi

$$(14)\quad \frac{\overline{BI}}{\overline{LD'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{D'M}} = \left(\frac{\overline{AO}}{\overline{D'O}}\right) > 1;$$

urmează deci că diferenţele

$$[(\overline{AB} - \overline{AI}) - (\overline{D'M} - \overline{LM})]$$

şi $(\overline{BI} - \overline{LD'})$ sunt pozitive, deci $d > 0$.

C. C. T. D.

Observarea III. *Dacă proiectăm pe rând punctele* B' *şi* D' *întâi paralel cu* O A' *în* B_1 *şi* D_1 *pe* A A'; *apoi, tot pe* A A', *în punctele* B_1' *şi* D_1' *luând focarul luminos (centrul de proiecţie) în* M, *obţinem pe segmentul* A A' *două diviziuni anarmonice egale:*

$$(A A' B_1 B_1') = (A A' D_1 D_1').$$

Considerând triunghiul A O A' şi transversalele M B' B_1' şi M D' D_1', avem după teorema lui *Menelaus*, următoarele relaţiuni (Fig. 3):

$$(15)\quad \frac{\overline{MO}}{\overline{MA'}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'O}} \cdot \frac{\overline{B_1'A'}}{\overline{B_1'A}} = +1;$$

$$\frac{\overline{MO}}{\overline{MA'}} \cdot \frac{\overline{D'A}}{\overline{D'O}} \cdot \frac{\overline{D_1'A'}}{\overline{D_1'A}} = +1.$$

Din relaţiunile (15) deducem

$$(16)\qquad \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'O}}\cdot\frac{\overline{B_1'A'}}{\overline{B_1'A}}=\frac{\overline{D'A}}{\overline{D'O}}\cdot\frac{\overline{D_1'A'}}{\overline{D_1'A}}.$$

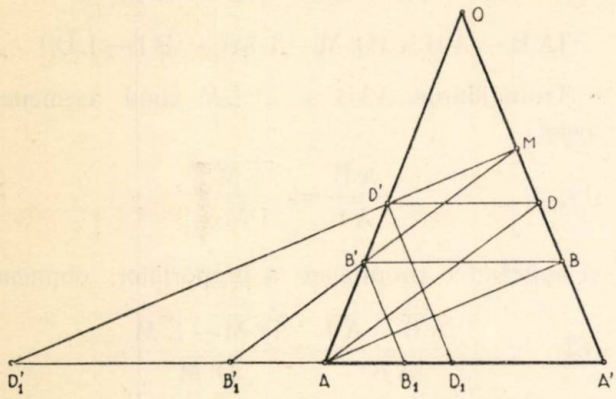


Fig. 3.

Dar $D'D_1$ şi $B'B_1$ fiind paralele cu OA', avem relaţiile:

$$(17)\qquad \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'O}}=\frac{\overline{B_1A}}{\overline{B_1A'}}\quad\text{şi}\quad\frac{\overline{D'A}}{\overline{D'O}}=\frac{\overline{D_1A}}{\overline{D_1A'}}.$$

Ţinând seama de relaţiile (17), relaţia (16) devine:

$$\frac{\overline{B_1A}}{\overline{B_1A'}}:\frac{\overline{B_1'A}}{\overline{B_1'A'}}=\frac{\overline{D_1A}}{\overline{D_1A'}}:\frac{\overline{D_1'A}}{\overline{D_1'A'}}\qquad \text{C. C. T. D.}$$

Observarea IV. Demonstraţiile de mai sus rămân valabile pentru diferitele cazuri de figură, unghiurile BAO şi DAO *fiind evident presupuse diferite* şi mai mici ca un unghiu cu laturile în prelungire.

c) Să considerăm acum triunghiul isoscel AOA', având pentru unghiul de la vârf ca măsură pe α. Fie drumul $AA_1A_1'M$ care duce de la vârful A la punctul M pe latura OA' astfel ca $\sphericalangle A_1AO=\varphi_1$, $A_1'A_1 \parallel AA'$, $\sphericalangle MA_1'O=\varphi_2$ şi un al doilea drum $AB_1B_1'M$, astfel ca $\sphericalangle B_1AO=\varphi'$, $B_1B_1' \parallel A'A$, $\sphericalangle MB_1'O=\varphi''$.

Care este relaţia care leagă cele două perechi de unghiuri (φ_1, φ_2) şi (φ', φ'').

Din triunghiul $OA_1'M$ avem:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA_1'}}=\frac{\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_2+\alpha)},$$

apoi din triunghiul OAA_1 avem:

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}}=\frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1+\alpha)};\qquad \text{dar}\quad \overline{OA_1'}=\overline{OA_1},$$

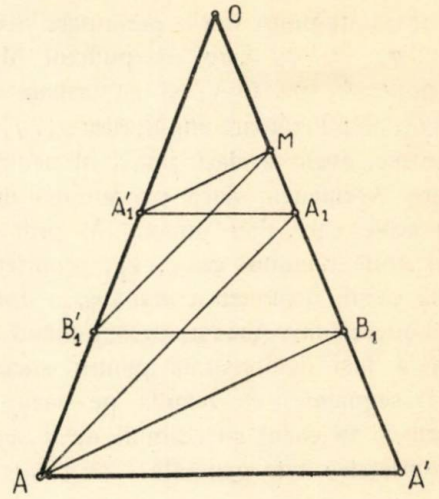


Fig. 4.

deci, deducem, înmulţind relaţiile precedente, că

$$(I)\qquad \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}}=\frac{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_1+\alpha)\sin(\varphi_2+\alpha)}.$$

Procedând analog pentru triunghiurile analoage, ale celui de al doilea drum, avem mai întâi:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OB_1'}}=\frac{\sin\varphi''}{\sin(\varphi''+\alpha)},$$

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA}}=\frac{\sin\varphi'}{\sin(\varphi'+\alpha)}\quad\text{şi}\quad\overline{OB_1'}=\overline{OB_1},$$

apoi:

$$(II)\qquad \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}}=\frac{\sin\varphi'\sin\varphi''}{\sin(\varphi'+\alpha)\sin(\varphi''+\alpha)}.$$

Comparând deci (I) cu (II) deducem:

$$\frac{\sin(\varphi_1+\alpha)\sin(\varphi_2+\alpha)}{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}=\frac{\sin(\varphi'+\alpha)\sin(\varphi''+\alpha)}{\sin\varphi'\sin\varphi''}.$$

sau încă, împărţind ambele părţi ale egalităţii cu $\sin^2\alpha$, avem relaţia:

$$(R)\qquad \boxed{\begin{array}{l}(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\varphi_1)(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\varphi_2)=\\(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\varphi')\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\varphi'')\end{array}}.$$

Observăm că φ_1 şi φ_2 fiind unghiuri date, la o valoare dată φ' corespunde un unghiu φ'', a cărui valoare este însă dependentă şi de unghiul α. Pentru un triunghiu isoscel dat există o infinitate de drumuri $A B_1 B_1' M$ şi unghiurile corespunzătoare sunt valabile pentru toate triunghiurile isoscele asemenea cu cel dat. Pentru ca o corespondenţă între (φ', φ'') şi (φ_1, φ_2) să fie valabilă pentru toate triunghiurile isoscele, trebue ca relaţia (R) să fie verificată oricare ar fi valoarea lui α; însă acest lucru are loc numai dacă:

$$\operatorname{cotg}\varphi_1 + \operatorname{cotg}\varphi_2 = \operatorname{cotg}\varphi' + \operatorname{cotg}\varphi'' \quad \text{şi}$$
$$\operatorname{cotg}\varphi_1 \operatorname{cotg}\varphi_2 = \operatorname{cotg}\varphi' \operatorname{cotg}\varphi'';$$

dar, când *produsul* şi *suma* a două perechi de numere sunt respectiv egale, numerele sunt egale; trebue deci să avem, ţinând seamă că $\varphi' \neq \varphi_1$; că $\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\varphi_2$, $\operatorname{tg}\varphi'' = \operatorname{tg}\varphi_1$ şi cum toate aceste unghiuri sunt prin ipoteză mai mici decât π, avem: $\varphi' = \varphi_2$, $\varphi'' = \varphi_1$, corespondenţă găsită de Domnul prof. *V. Alaci* cu ajutorul unei simple interpretări a formulei care dă transformarea rombică iterată (φ_1, φ_2).

Observare. In procedeul pentru obţinerea relaţiei (R), care leagă cele două perechi de unghiuri (φ_1, φ_2) şi (φ', φ''), faptul că triunghiul $A O A'$ este isoscel a servit numai ca să arate că:

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_1'}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OB_1'}} = 1,$$

de aci bănuiala că proprietatea este mai generală.

In adevăr, dacă luăm un unghiu oarecare $X O Y$ şi drumul $A B B' M$ înscris în el astfel ca $\sphericalangle B A O = \varphi_1$, $\sphericalangle M B' O = \varphi_2$; apoi drumul înscris $A D D' M$ astfel ca $\sphericalangle D A O = \varphi_2$, iar $D D' \parallel B B'$, putem să arătăm că, oricare ar fi măsura α a unghiului $X O Y$, avem $\sphericalangle M D' O = \varphi_1$. Punând $\sphericalangle M D' O = \varphi$ şi considerând triunghiurile $O B' M$ şi $O B A$, avem relaţiile:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OB'}} = \frac{\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_2+\alpha)} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1+\alpha)}$$

şi ca urmare relaţia:

$$(18) \quad \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{\sin(\varphi_1+\alpha)\sin(\varphi_2+\alpha)}.$$

Tot astfel din triunghiurile $O D' M$, $O D A$, avem:

$$(19) \quad \frac{\overline{OM}}{\overline{OD'}} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\alpha)}; \quad \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_2+\alpha)},$$

deci:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{OD}}{\overline{OD'}} = \frac{\sin\varphi_2 \sin\varphi}{\sin(\varphi_2+\alpha)\sin(\varphi+\alpha)}.$$

Dar din asemănarea triunghiurilor $O D D'$ şi $O B B'$ avem:

$$(20) \quad \frac{\overline{OD}}{\overline{OD'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}};$$

comparând relaţiile (18 şi 19) şi ţinând seamă de relaţia (20), deducem:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\alpha)} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1+\alpha)},$$

sau încă:

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\varphi_1,$$

şi cum avem $\varphi < \pi$, $\varphi_1 < \pi$, din egalitatea $\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg}\varphi_1$, deducem că $\varphi = \varphi_1$.

d) Ca urmare a observării precedente, vom enunţa proprietatea geometrică, mai generală, următoarea:

Teoremă. *Dacă în unghiul* $A O Y$ *dat oarecare înscriem segmentele* $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ *oarecare, apoi segmentele* BB', $D D'$ *paralele între ele, dreptele* $B' B''$ *şi* $D' D''$ *respectiv paralele cu* $A D$ *şi* $A B$ *se întâlnesc pe latura* $O Y$.

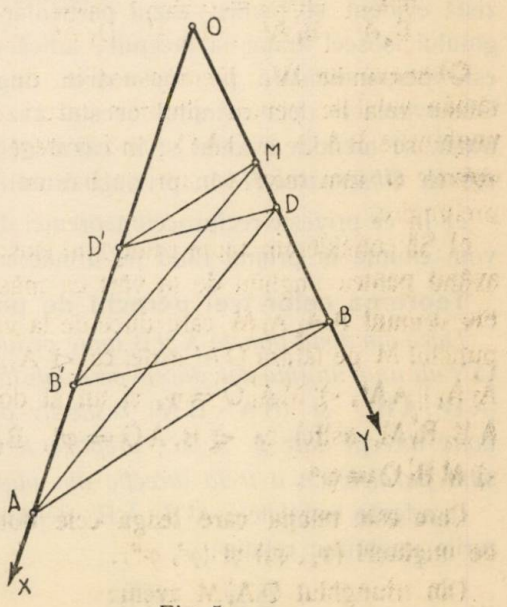


Fig. 5.

Să presupunem că dreptele $B' B'$, $D' D''$ taie latura $O Y$ în două puncte respectiv M şi M_1.

Considerând triunghiurile asemenea: (OMB', ODA) şi (OM_1D', OBA) avem relaţiile:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OD'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$$

din care deducem:

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OB'} \cdot \overline{OD}}{\overline{OA}} \tag{21}$$

şi

$$\overline{OM_1} = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OD'}}{\overline{OA}} . \tag{22}$$

Dar $DD' \parallel BB'$, deci:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OD'}}{\overline{OB'}} , \tag{23}$$

sau încă:

$$\overline{OB'} \cdot \overline{OD} = \overline{OB} \cdot \overline{OD'} . \tag{24}$$

Comparând relaţiile (21), (22) şi ţinând seamă de relaţia (24), obţinem: $\overline{OM_1} = \overline{OM}$, ceeace demonstrează proprietatea, deoarece segmentele egale OM_1, $\overline{OM}$ având aceeaşi origină şi sens pe OY, trebue să aibă neapărat aceeaşi extremitate.

Observarea I^a. Demonstraţia de mai sus subzistă evident şi pentru cazul particular al triunghiului isoscel (tratat la început, adică când BB' este perpendiculară pe bisectoarea unghiului O. Observarea I^a dela sfârşitul acestui caz particular tratat, se menţine evident şi în cazul general. Asemenea *Observarea II^a* în privinţa drumului minim.

e) In ce priveşte reciprocele teoremei de mai sus, vom enunţa în primul rând pe următoarea:

Teorema celor trei perechi de paralele.

Dacă din două puncte A *şi* B *luate pe laturile* OX, OY *ale unui unghiu dat, ducem perechile de segmente* (AB', AB'') *şi* (BA'', BA') *respectiv paralele cu două direcţii date* Δ' *şi* Δ'', *dreptele* $A'B'$, $A''B''$ *sunt paralele cu a treia direcţie din plan.*

In adevăr, paralelele $A'B$, AB'' determină pe laturile unghiului relaţia:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB''}} ; \tag{1}$$

asemenea paralelele BA'', AB' dau relaţia:

$$\frac{\overline{OA''}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} , \tag{2}$$

şi împărţind (1) cu (2), parte cu parte, avem:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA''}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB''}} ,$$

deci că $\overline{A'B'}$, $\overline{A''B''}$ sunt paralele. C.C.T.D.

Observare. Această reciprocă poate fi enunţată şi subt forma:

Dacă într'un unghiu XOY *avem două drumuri frânte înscrise* $ABCM$ *şi* $AB'C'M$ *(plecând dela acelaşi punct* A *de pe latura* OX *şi ajungând în acelaşi punct* M *de pe latura* OY*) astfel ca* $AB' \parallel CM$ *şi* $B'C' \parallel BC$, *dreapta* $C'M$ *este paralelă cu* AB.

f) In ce priveşte proprietatea dată în *Observarea III*, dela cazul particular, ea poate fi enunţată subt forma următoare:

Dacă în unghiul XOY *avem înscrise două drumuri frânte* $ABCM$ *şi* $AB'C'M$, *astfel că* $AB' \parallel CM$; $B'C' \parallel BC$; $C'M \parallel AB$, *şi dacă prin* A *ducem dreapta* AD, *tăind pe* OY *în* D, *proiectând punctele* C *şi* C' *paralel cu* OY *în* C_1 *şi* C_1', *şi prin fascicol cu focarul în* M *în* C_2 *şi* C_2', *avem:*

$$(ADC_1C_2) = (ADC_1'C_2') .$$

Demonstraţia identică cu aceea dată în cazul particular.

4 Februarie 1940.

FUNCŢIUNI PSEUDO-HIPERBOLICE.

STUDIU ELEMENTAR.

de

EUGEN VIŞA

Introducere.

Analog *funcţiunilor patratice* definite şi studiate în chip atât de magistral de D-l Prof. *Valeriu Alaci* dela Şcoala Politechnică din Timişoara *), se pot defini alte funcţiuni importante, cărora am fost condus a le da numele de *funcţiuni pseudo-hiper-*

*) A se vedea lucrarea D-sale *„Trigonometria patratică“* publicată mai întâi sub formă de articole în *„Revista Matematică din Timişoara“* (Vol. XVIII, Nr. 10 — Vol. XIX, Nr. 9), iar ulterior şi în volum (Timişoara, 1939).

bolice, întrucât ele sunt în de aproape înrudite cu *funcţiunile hiperbolice* propriu zise.

Raportul care există între aceste noui funcţiuni şi cele hiperbolice, este de aceeaşi natură ca şi raportul dintre *funcţiunile patratice* ale D-lui Profesor *Alaci* şi *funcţiunile circulare*.

De sigur, foarte multe dintre aplicaţiile funcţiunilor patratice considerate de D-l Profesor *Alaci*, îşi vor găsi corespondentele lor în cazul *funcţiunilor pseudo-hiperbolice*. Din acest punct de vedere se pare chiar că există o singură excepţie, anume în ceeace priveşte aplicaţiile relative la *rezolvirea triunghiurilor*, deoarece astfel de aplicaţii nu se cunosc nici în cazul funcţiunilor hiperbolice obişnuite.

In tot cazul, viitorul va avea să ne arate până unde merge această corespondenţă.

De pe acum se poate însă întrevedea că aplicaţiile geometrice ale funcţiunilor *pseudo-hiperbolice* promit a fi cu deosebire interesante.

Deocamdată mă voiu mărgini însă numai la studiul propriu zis al acestor funcţiuni, rămânând ca în alte lucrări ulterioare să mă ocup şi de câteva aplicaţii ale lor.

De asemenea, cel puţin pentru moment, voiu avea să mă refer numai la *domeniul real*, care de altfel este primul ce se impune unor consideraţii elementare.

In felul acesta, studiul de faţă ar vrea să fie, în linii mari, echivalentul primei părţi din lucrarea D-lui Profesor *Alaci*: *„Trigonometria patratică“*.

Pentru a fi totuşi cât mai sumar posibil şi pentru a nu îngreuna prea mult expunerea, anumite chestiuni de detaliu, precum şi altele cari mi-se vor părea mai puţin importante, le voiu lăsa chiar intenţionat la o parte.

CAP. I.

Definiţia funcţiunilor pseudo-hiperbolice.

Proprietăţi fundamentale. Configuraţia de referinţă.

1. Fiind date în plan două unghiuri (Fig. 1) având dreapta vârfurilor A A′ drept axă de simetrie comună, vom conveni să dăm configuraţiei alcătuită din ansamblul acestor două unghiuri numele de *pseudo-hiperbolă*, dacă ele sunt în acelaş timp unul simetricul celuilalt faţă de mediatoarea segmentului determinat de vârfurile lor, fără ca această mediatoare să taie laturile unghiurilor date.

Ca aspect, această configuraţie prezintă, după cum se vede, foarte multă asemănare cu o hiperbolă obişnuită; ba ceva mai mult: în oarecare măsură ea poate fi privită chiar ca o hiperbolă degenerată.

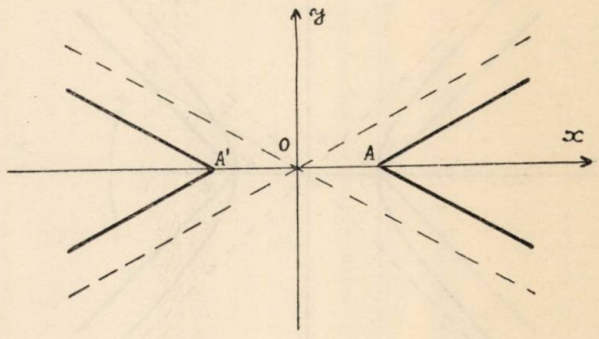


Fig. 1.

In tot cazul e demn de relevat însă, că oricărei pseudo-hiperbole i-se poate ataşa o hiperbolă propriu zisă, cu asimptotele paralele respectiv cu cele două categorii de semidrepte cari alcătuesc ramurile ei si având respectiv aceleaşi elemente de simetrie si aceleaşi vârfuri.

In particular vom numi *echilateră* pseudo-hiperbola căreia i-se poate ataşa o hiperbolă de aceeaşi natură. Aceasta are evident fiecare ramură alcătuită din semidrepte perpendiculare între ele.

O astfel de pseudo-hiperbolă particulară va avea să ne servească drept *configuraţie fundamentală de referinţă* pentru definiţia *funcţiunilor pseudo-hiperbolice*.

Sinusul şi cosinusul pseudo-hiperbolic.

2. Fie pseudo-hiperbola echilateră din (Fig. 2) cu vârfurile A şi A′ la distanţe de centrul O egale cu *unitatea*. Considerăm în acelaş timp şi hiperbola echilateră ataşată ei.

Fie de asemenea şi un punct M pe ramura din dreapta a pseudo-hiperbolei date şi N punctul de intersecţie al semidreptei O M cu ramura corespunzătoare a hiperbolei ataşată.

Notând dublul ariei sectorului hiperbolic O A N O cu α, vom conveni, conform uzului, să considerăm această arie dublă ca pozitivă sau negativă, după

cum sensul rotaţiei celei mai mici, care aduce semiaxa O A peste semidreapta O M, este respectiv direct sau retrograd, înţelegând prin sens direct sensul trigonometric obişnuit.

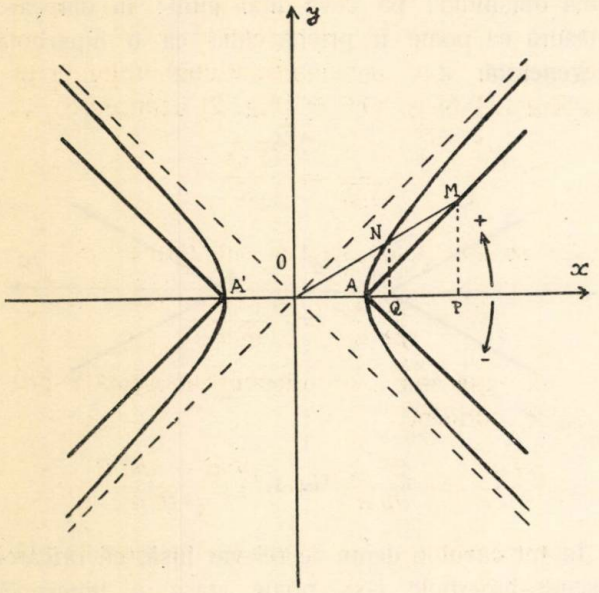


Fig. 2.

3. **Definiţii.** 1°. *Numim sinus pseudo-hiperbolic al argumentului* $2\,(O\,A\,N\,O) = \alpha$, *lungimea perpendicularei* $\overline{M\,P}$ *dusă din* M *pe* O A, *luată cu semnul* $+$ *sau* $-$, *după cum punctul* M *se găseşte respectiv deasupra sau dedesubtul lui* O A.

Notând *sinusul pseudo-hiperbolic* de α prin simbolul *sph* α, putem scrie prin urmare relaţia:

$$sph\ \alpha = \pm\,\overline{M\,P}.$$

Din definiţia dată rezultă că, *sinusul pseudo-hiperbolic* are acelaş semn ca şi argumentul corespunzător.

Se mai poate spune în acelaş timp că această funcţiune satisface relaţiei fundamentale:

$$(1) \qquad sph\,(-\alpha) = -\,sph\,\alpha$$

ceeace exprimă că *sinusul pseudo-hiperbolic* este o *funcţiune impară.*

2°. *Numim cosinus pseudo-hiperbolic al argumentului* $2\,(O\,A\,N\,O) = \alpha$, *lungimea segmentului* $\overline{O\,P}$, *care măsoară distanţa dela punctul* O *până la piciorul perpendicularei dusă din* M *pe* O A, *această lungime fiind luată exclusiv cu semnul* $+$.

Notând *cosinusul pseudo-hiperbolic* de α prin simbolul *cph* α, avem relaţia:

$$cph\ \alpha = +\,\overline{O\,P}.$$

Din definiţie rezultă că această a doua funcţiune are în mod constant semnul $+$.

Cosinusul pseudo-hiperbolic este în acelaş timp o *funcţiune pară,* el satisfăcând relaţiei fundamentale:

$$(2) \qquad cph\,(-\alpha) = cph\,\alpha.$$

4. *Observaţii.* Am definit *sinusul* şi *cosinusul pseudo-hiperbolic* raportându-ne la ramura din dreapta a pseudo-hiperbolei din (Fig. 2). Evident, am fi putut face acelaş lucru, raportându-ne la ramura ei din stânga, dar în acest caz ar fi trebuit să intervertim rolurile noţiunilor de *deasupra* şi de *dedesupt* în ceeace priveşte axa ei transversă.

5. *Continuitate.* Definiţia geometrică pe care am dat-o celor două funcţiuni *pseudo-hiperbolice* considerate, evidenţiază în mod intuitiv că aceste funcţiuni sunt continui în tot intervalul dela $-\infty$ la $+\infty$.

In adevăr, observând (Fig. 2) constatăm că la o creştere foarte mică pentru argument, corespunde o deplasare foarte mică a punctului M pe ramura respectivă a *pseudo-hiperbolei fundamentale,* ceeace atrage după sine creşteri foarte mici pentru *sinusul* şi *cosinusul pseudo-hiperbolic.*

6. *Variaţie.* Urmărind aceeaşi figură, putem alcătui cu uşurinţă următorul tablou, foarte schematic de altfel, relativ la variaţia funcţiunilor *sph* α şi *cph* α.

α	$-\infty$		0		$+\infty$
sph α	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
cph α	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Alte funcţiuni pseudo-hiperbolice.

7. *Tangenta* şi *cotangenta pseudo-hiperbolică* se definesc în mod analog cu *tangenta* şi *cotangenta hiperbolică.* Intrucât se constată însă că ele sunt respectiv chiar identice acestora, nici nu vom stărui asupra lor.

8. In ceeace priveşte *secanta* şi *cosecanta pseudo-hiperbolică,* pentru simplificare, vom defini aceste funcţiuni prin relaţiile:

$$(3)\qquad \begin{cases} Sph\ \alpha = \dfrac{1}{cph\ \alpha} \\ Cph\ \alpha = \dfrac{1}{sph\ \alpha} \end{cases}$$

unde simbolul *Sph α* se citeşte *secantă pseudo-hiperbolică de α*, iar *Cph α*, *cosecantă pseudo-hiperbolică de α*.

Cu toate că aceste funcţiuni nu mai sunt identice cu *funcţiunile hiperbolice* corespunzătoare, tot din motive de simplificare, nu vom stărui însă nici asupra lor.

Formule fundamentale.

9. Vom stabili în cele de mai jos două relaţii fundamentale între *sinusul* şi *cosinusul pseudo-hiperbolic* al unui argument dat.

1°. *Dacă α este un argument pozitiv, avem relaţia:*

$$(4)\qquad \boxed{cph\ \alpha - sph\ \alpha = 1}\ .$$

In adevăr, observând că triunghiul A P M este isoscel (Fig. 2), putem scrie:

$$\overline{AP} = \overline{PM} = sph\ \alpha.$$

Cum însă avem relaţia de distanţe

$$\overline{OP} - \overline{OA} = \overline{AP},$$

ţinând încă seama de definiţia *cosinusului pseudo-hiperbolic*, relaţia (4) rezultă imediat.

2°. *Dacă α este un argument negativ, avem relaţia:*

$$(4')\qquad \boxed{cph\ \alpha + sph\ \alpha = 1}\ .$$

In adevăr, de astă dată avem:

$$\overline{AP} = \overline{PM} = -\ sph\ \alpha$$

aşa încât aceeaşi relaţie de distanţe din cazul precedent, ne conduce acum în acelaş mod, la relaţia (4').

Exprimarea funcţiunilor pseudo-hiperbolice cu ajutorul celor hiperbolice.

10. Ne propunem acum a exprima *sinusul* şi *cosinusul pseudo-hiperbolic* în funcţie de *tangenta hiperbolică* de acelaş argument.

1°. *Dacă α este un argument pozitiv, avem relaţiile:*

$$(5)\qquad \boxed{\begin{array}{l} sph\ \alpha = \dfrac{th\ \alpha}{1 - th\ \alpha} \\ \\ cph\ \alpha = \dfrac{1}{1 - th\ \alpha} \end{array}}\ .$$

In adevăr, din asemănarea triunghiurilor dreptunghice O P M şi O Q N (Fig. 2) deducem:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{QN}}$$

ceeace se mai poate scrie şi sub forma:

$$\frac{cph\ \alpha}{sph\ \alpha} = \frac{1}{th\ \alpha}$$

de unde, aplicând o proprietate cunoscută a proporţiilor, obţinem:

$$\frac{cph\ \alpha}{1} = \frac{sph\ \alpha}{th\ \alpha} = \frac{cph\ \alpha - sph\ \alpha}{1 - th\ \alpha}\ .$$

Ultimele relaţii, în baza formulei fundamentale (4), se scriu:

$$\frac{cph\ \alpha}{1} = \frac{sph\ \alpha}{th\ \alpha} = \frac{1}{1 - th\ \alpha},$$

aşa încât relaţiile (5) rezultă imediat.

2°. *Dacă α este un argument negativ, avem relaţiile:*

$$(5')\qquad \boxed{\begin{array}{l} sph\ \alpha = \dfrac{th\ \alpha}{1 + th\ \alpha} \\ \\ cph\ \alpha = \dfrac{1}{1 + th\ \alpha} \end{array}}\ .$$

In adevăr, printr'un raţionament analog celui din cazul precedent, deducem de astădată şirul de rapoarte egale:

$$\frac{cph\ \alpha}{1} = \frac{sph\ \alpha}{th\ \alpha} = \frac{cph\ \alpha + sph\ \alpha}{1 + th\ \alpha}$$

şi ţinând seama de formula fundamentală (4'), obţinem:

$$\frac{cph\ \alpha}{1} = \frac{sph\ \alpha}{th\ \alpha} = \frac{1}{1 + th\ \alpha}$$

de unde, relaţiile (5') apar şi ele numai decât.

(va urma)

NOTE MATEMATICE

1. — *Sur un procédé donnant une infinité de relations entre bicarrés à partir de relations triviales entre bicarrés.*

Soit $a_1, a_2 \ldots a_n$, un système de n nombres entiers. Considérons un permutation de ces nombres oú aucun n' occupe le même rang que dans le groupement primitif, par exemple la permutation cyclique $a_2, a_3, \ldots a_n, a_1$.

Nous avons évidemment

$$a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x = a_2^x + a_3^x + \cdots + a_n^x + a_1^x,$$

(x, quelconque).

Posons maintenant

$$b_1 = a_1 + \alpha_1 t, \quad b_2 = a_2 + \alpha_2 t, \ldots, b_n = a_n + \alpha_n t$$
$$c_1 = a_2 + \alpha_1 t, \quad c_2 = a_3 + \alpha_2 t, \ldots, c_n = a_1 + \alpha_n t.$$

L'équation $\sum_{i=1}^{n} b_i^4 = \sum_{i=1}^{n} c_i^4$ sera satisfaite si l'on annule le coefficient de t dans l'équation obtenue en développant les bicarrés des binômes, ce qui donne une relation linéaire entre les α_i, et si l'on détermine t par l'équation linéaire en t qui reste. (aprés simplification par t^2).

Exemples numériques.

1. De $1^x + 2^x + 3^x = 3^x + 1^x + 2^x$, on déduit la relation

$$-26\,\alpha_1 + 7\,\alpha_2 + 19\,\alpha_3 = 0;$$

prenons

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 19, \quad \alpha_3 = -7.$$

$$t = -\frac{166}{543},$$

et

$$543^4 + 2068^4 + 2791^4 =$$
$$1629^4 + 2611^4 + 2248^4 \quad (= 79.055.578.851.938).$$

2. De $1^x + 2^x + 4^x = 4^x + 1^x + 2^x$, on déduit

$$-9\,\alpha_1 + \alpha_2 + 8\,\alpha_3 = 0;$$

prenons

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 8, \quad \alpha_3 = -1.$$

$$t = -\frac{51}{85},$$

et

$$85^4 + 238^4 + 391^4 = 340^4 + 323^4 + 221^4$$
$$(= 26.633.343.522).$$

3. De la même relation évidente, on déduit, avec

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 9, \quad \alpha_3 = 0, \quad t = -\frac{57}{121},$$

et

$$64^4 + 271^4 + 484^4 = 427^4 + 392^4 + 242^4$$
$$(= 60.286.231.233).$$

On peut écrire cette dernière identité sous la forme:

$$2^{24} + 22^8 + 271^4 = 427^4 + 2^4 \cdot 14^8 + 2^4 \cdot 11^8.$$

4. De $1^x + 2^x + 0^x = 0^x + 1^x + 2^x$, on déduit

$$\alpha_1 + 7\,\alpha_2 - 8\,\alpha_3 = 0;$$

avec

$$\alpha_1 = 7, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0, \quad \text{on a} \quad t = -\frac{13}{57},$$

et

$$34^4 + 127^4 = 91^4 + 70^4 + 114^4 \ (= 261.480.977).$$

5. De $2^x + 3^x + 0^x = 0^x + 2^x + 3^x$, on tire

$$8\,\alpha_1 + 19\,\alpha_2 - 27\,\alpha_3 = 0;$$

pour

$$\alpha_1 = 19, \quad \alpha_2 = -8, \quad \alpha_3 = 0, \quad \text{on a} \quad t = -\frac{441}{2201},$$

et

$$3977^4 + 10131^4 = 8379^4 + 7930^4 + 6603^4$$
$$(= \cdots 762).$$

6. $1^x + 3^x + 0^x = 0^x + 1^x + 3^x$;

$$\alpha_1 + 26\,\alpha_2 - 27\,\alpha_3 = 0;$$

$$\alpha_1 = 26, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 0; \quad t = -\frac{171}{2929},$$

$$1517^4 + 8958^4 = 4446^4 + 3100^4 + 8787^4$$
$$(= \cdots 217).$$

7. $0^x + 1^x + 2^x + 3^x = 1^x + 2^x + 3^x + 0^x$;

$$-\alpha_1 - 7\,\alpha_2 - 19\,\alpha_3 + 27\,\alpha_4 = 0,$$

$$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 3, \quad \alpha_4 = 2; \quad t = -\frac{7}{11};$$

$$28^4 + 18^4 + 1^4 + 19^4 = 17^4 + 29^4 + 12^4 + 14^4$$
$$(= 849.954).$$

Remarquons, qu'on a

$$19 = 18 + 1 \quad \text{et} \quad 29 = 17 + 12.$$

On a aussi

$$28^2 + 18^2 + 1^2 + 19^2 = 17^2 + 29^2 + 12^2 + 14^2 \quad (= 1470).$$

A. GLODEN

---

2. — *Relaţiuni între funcţiuni patratice şi circulare inverse.*

La relaţiunile dintre funcţiunile patratice inverse şi cele circulare inverse stabilite de d-l prof. *V. Alaci* în volumul *„Trigonometria patratică“* la paginele 40—41, mai pot a se adăuga şi cele ce urmează.

Ţinând seama de tabloul (58) din volumul citat, se poate scrie: pentru $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$d.(\text{arc sp } x) = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{x^2 + (x-1)^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}$$

adică:

$$(1) \qquad \boxed{d(\text{arc sp } x) = d\left[\text{arc tg}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]}.$$

Pentru celelalte cadrane, pe aceiaşi cale se poate vedea că se obţine:

$$d(\text{arc sp } x) = -d\left[\text{arc tg}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right], \left(\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\right),$$

$$d(\text{arc sp } x) = d\left[\text{arc tg}\left(\frac{x+1}{x}\right)\right], \left(\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$d(\text{arc sp } x) = -d\left[\text{arc tg}\left(\frac{x+1}{x}\right)\right], \left(\frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi\right).$$

In mod cu totul analog, se obţine şirul de egalităţi pentru arc *cp x*:

$$d(\text{arc cp } x) = -d\left[\text{arc tg}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right], \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(2) \qquad d(\text{arc cp } x) = d\left[\text{arc tg}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right], \left(\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\right),$$

$$d(\text{arc cp } x) = -d\left[\text{arc tg}\left(\frac{x+1}{x}\right)\right], \left(\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$d(\text{arc cp } x) = d\left[\text{arc tg}\left(\frac{x+1}{x}\right)\right], \left(\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right).$$

MIHAIL ST. BOTEZ

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLV, Nr 6, Februarie 1940. † *Gheorghe Ţiţeica*, de *Gh. Th. Gheorghiu*. Impresiile contelui *Samuil Teleki* despre matematicieni străini (urmare), de *Victor Marian*. Asupra unei sfere asociate tetraedrului, de *V. Thebault*. Concursul *„Gazetei Matematice“*. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Pitagora*, anul V, Nr. 5, Februarie 1940. Natura intrinsecă a legilor opticei geometrice, de *T. Vescan*. Asupra unor cercuri atasate unui triunghiu, de *C. Cosniţă*. Cuartica polară a unei conice în raport cu un fascicol punctual de conice, de *C. Borş*. Note. Probleme rezolvate şi propuse

3. *Th. Angheluţă*. **Curs de Algebră superioară. Funcţii Analitice,** cu o notă de d-l *Paul Montel*.

Această importantă carte didactică, de 314 pagini, care cuprinde *proprietăţile fundamentale ale funcţiunilor de o variabilă complexă cu derivată,* poate fi privită ca un preţios dar al distinsului profesor de la Universitatea din *Cluj* D-l *Angheluţă*, oferit studenţilor universitari, studenţilor ingineri, candidaţilor la examenul de capacitate pentru catedrele de matematici din învăţământul secundar, precum şi tutulor celor înclinaţi spre cercetări proprii în domeniul matematicilor.

Cartea d-lui profesor *Angheluţă*, profund creator în domeniul matematicilor, în zonele ei superioare, trebuie să fie folosită de toţi acei cărora li se adresează, pe care i-am menţionat mai sus.

4. *Dr. Erich Stern*. General formulas for the number of magic squares belonging to certain clases.

5. *M. Ghermănescu*. Une inégalité pour les algebroïdes.

6 *N. M.* Raportul anarmonic. (Monografia No. 5, din biblioteca revistei *„Pitagora“*.

7. *Valer Novac*. Evoluţia concepţiei despre lumină.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 444. — *Un baston fabricat dintr-un material omogen şi având mânerul în semicerc este suspendat în capătul mânerului. Să se găsească înclinarea bastonului faţă de verticală în poziţia sa de echilibru.*

V. VALCOVICI

Această problemă a fost propusă în n-l de la 15 Aprilie 1925 al *„R. M. T.“* Ulterior, şi anume în *„Gazeta Matematică“* de la 15 Iulie 1936, d-l *I. Ionescu* a propus sub. No. 4687 o problemă,

care o cuprinde pe aceasta, şi care are următorul enunţ:

„Un baston are o tijă rectilină terminată la un cap cu un mâner semicircular. Care este poziţia de echilibru când î-l punem într'un cuiu? In ce caz vârful liber cade pe verticala cuiului? Aceiaşi problemă când capătul semicircular se aşează pe cuiu. Se va neglija efectul grosimei şi frecările pe cuiu".

Soluţia problemei d-lui *I. Ionescu* este publicată în *„Gazeta Matematică"*, Vol. XLIII, pag. 491, unde se găseşte deci şi soluţia problemei 444, propusă cu 11 ani înaintea problemei d-lui *I. Ionescu.*

E de observat că în problema 444 nu se cere a nu ţine seamă de greutate, prin urmare atunci când se va stabili centrul de greutate al mânerului se va ţine seamă că acest mâner este un *semitor,* iar nu un semicerc.

Au dat raţionamente bune pentru problema 444 d-şoa a *Blasko Beatrice* şi d-nii *Lăzărescu I. I., Manolescu I. N., Panţu Z. I.* şi *Silistrarianu C.*

Problema 1699. — *Să se determine m astfel ca pentru* $x = 1$, *limita expresiei,*

$$\frac{m\,x^{m+2} - (m+1)\,x^{m+1} + x}{x^3 - 2x + 1}$$

să fie egală cu 15.

C. IVANESCU

Prima soluţie. Expresiunea dată, notată cu E, se poate scri succesiv:

$$E = \frac{x\,[m\,x^m(x-1) - (x^m - 1)]}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{x\,[m\,x^m - (x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1)]}{x - 1} =$$

$$\frac{x\sum_{k=1}^{m} x^{m-k}(x^k - 1)}{x - 1} =$$

$$x\sum_{k=1}^{m} x^{m-k}(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1).$$

Pentru $x = 1$, deducem

$$E_{x=1} = \sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Cum enunţul cere ca limita lui E pentru $x = 1$ să fie 15, rezultă

$$m(m+1) = 30$$

deci:

$$\boxed{m = 5}, \qquad \text{sau:} \qquad \boxed{m = -6}.$$

Am aflat astfel chiar valoarea lui E pentru $x = 1$.

Soluţii bune date de d-ra, *Checian Ana* (lic. Carmen Sylva, Timişoara) şi de d-nii: *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Lepolszki Carol* (Cluj), *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Staicu I. N.* (lic. Milit, N. Filipescu) şi *Stamate I. Ionel* (bacalaureat, Lugoj).

Soluţia 2ª. Pentru $x = 1$, expresia E ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, astfel că aplicăm teorema lui *Hôspital,* adică luăm raportul între derivata numărătorului şi numitorului pentru $x = 1$ şi avem

$$E_{x=1} = \left|\frac{m(m+2)\,x^{m+1} - (m+1)^2\,x^m + 1}{2x - 2}\right|_{x=1} = \frac{0}{0}.$$

Obţinând tot forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, aplicăm încă odată regula lui *Hôspital* şi obţinem:

$$E_{x=1} = \left|\frac{m(m+1)(m+2)\,x^m - m(m+1)^2\,x^{m-1}}{2}\right|_{x=1} =$$

$$\frac{m(m+1)[(m+2) - (m+1)]}{2} = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Conform enunţului trebuie să avem:

$$m(m+1) = 30,$$

deci:

$$\boxed{m = 5}, \qquad \text{sau:} \qquad \boxed{m = -6}.$$

Soluţii date de d-nii: *Andrievici N.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Aniţescu N. Nicolae, Bârlea Victor Suhăţeanu* (lic. Milit, N. Filipescu), *Damianof Ştefan* (Institutul Român, Sofia), *Buznea D. Dinu* (lic. Milit, N Filipescu), *Borneas Marius* (lic. Arad), *Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Deheleanu Gheorghe, Diaconescu D. Ion* (lic. T-Severin), *Dragomir Ev. Adrian, Jidanu I. C-tin* (Şc. Polit, Timişoara), *Matei I. Augustin* (student, Cluj), *Mihoc N. Ovidiu, Mureşan I. Oct.* (lic. Arad), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Pătruţă Chiril, Rădulescu R. Alexandru* (lic Ploeşti), *Schapira Salo, Segal Zigu* (lic. Vaslui) *Tătaru Alexandru* (lic Orăştie), *Tilică C. Ştefan, Todoran G. Gheorghe* (lic. Beiuş) şi *Venter D-tru* (lic Beiuş).

Problema 1700. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$p^2 r\,x^3 - p^2 x^2 + (4R + r)\,x - 1 = 0,$$

p, r, R *fiind elementele obicinuite într'un triunghiu oarecare.*

IOAN S. TRICA

Soluție. In baza relațiilor cunoscute

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r$$
$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$$
$$r_a r_b r_c = p^2 r,$$

(*Traian Lalesco;* La Géométrie du triangle, page 113 et 114), ecuația dată devine:

$$r_a r_b r_c \cdot x^3 - (r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a) x^2 + (r_a + r_b + r_c) x - 1 = 0.$$

Facem transformata în $\frac{1}{x}$ și obținem ecuația:

$$(1) \quad x^3 - (r_a + r_b + r_c) x^2 + (r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a) x - r_a r_b r_c = 0.$$

Ținând seama de relațiile ce există între rădăcini și coeficienți, suntem îndreptățiți a afirma că rădăcinele ecuației (1) sunt

$$x_1 = r_a, \quad x_2 = r_b, \quad x_3 = r_c.$$

Rezultă că rădăcinele ecuației date sunt

$$\frac{1}{r_a}, \quad \frac{1}{r_b}, \quad \frac{1}{r_c}.$$

r_a, r_b, r_c fiind razele cercurilor exînscrise într'un triunghiu oarecare.

Soluții date de d nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timișoara), *Bârlea-Suhățeanu G Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Buznea D. Dinu* (lic. Milit, N. Filipescu), *Buznea D. Dinu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Dăscălescu Șt. Hristache* (Focșani), *Jidanu I. C.* (Șc. Polit, Timișoara), *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Stamate I. Ionel* (student, Cluj), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Șerban C. C-tin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stoenescu D. Mircel* (lic. Milit, N. Filipescu), *Tilică C. Ștefan, Vijelie Gh. Eugen* (lic. Milit, N. Filipescu).

Problema 1703. — *Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relațiile:*

$$\frac{a(r+p-a)^2}{r(p-a)} = \frac{a(r_a+p)^2}{r_a p} = 2(a+2R).$$

V. ALACI

Prima soluție. Insemnând cu E primul membru și ținând seama de relațiile cunoscute

$$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r_a}{p},$$

putem scri succesiv,

$$(1) \quad E = \frac{a(p-a)^2\left(1+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^2}{(p-a)^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2}} =$$

$$= \frac{a\left(1+\frac{r_a}{p}\right)^2}{\frac{r_a}{p}} = \frac{a(r_a+p)^2}{r_a p}$$

și prima relație este astfel stabilită.

Apoi observăm că relația (1) se mai poate scri:

$$E = \frac{a\left(1+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^2}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = \frac{a\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} =$$

$$\frac{2a(1+\sin A)}{\sin A} = \frac{2a\left(1+\frac{a}{2R}\right)}{\frac{a}{2R}} = 2(2R+a).$$

Avem astfel stabilită și relația 2ª.

Soluții date de d-nii: *Anițescu N. Nicolae, Bakonyi C.* (lic. Loga, Timișoara), *Bârlea-Suhățean Victor* (lic. Milit., Filipescu), *Brădeanu Nicolae. Cernat Camil* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cetățeanu Stelian* (lic. Sincai, București), *Cristea I. Nicolae* (lic. Blaj), *Deciulescu D. Gheorghe* (lic. Milit, Filipescu), *Diaconescu D. Ioan* (lic. T-Severin), *Dragomir Adrian Ermin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Georgescu Benone* (Colegiul Carol I, Craiova), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Lepolszky Carol* (bacalaureat, Cluj), *Logofătu M. Ioan, Luca I. Ioan* (lic. Arad), *Matei M. Chintescu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Mihăileanu Andrei Călin* (lic. Arad), *Mihoc N. Ovidiu, Negrea A. Mircea* (Brăila). *Saegiu V. C-tin* (bacalaureat, Cluj), *Șandor Vasile, Serban C C-tin* (lic. Milit, N Filipescu), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Stoicu I. N.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stamate I. Ionel* (student, Cluj) și *Văduva F. Marin* (lic. Giurgiu).

Soluția 2ª. Inversând relațiile date și înmulțindu-le cu $2a$, obținem:

$$\frac{2r(p-a)}{(r+p-a)^2} = \frac{2pr_a}{(r_a+p)^2} = \frac{a}{a+2R}.$$

Aceste relațiuni fac obiectul problemei 1623, propusă de același autor, și rezolvată în „R. M. T", anul XVIII, Nr. 5, p. 59.

Soluții analoage date de d-nii: *Buznea D. Dinu* (lic. Milit, N. Filipescu), *Dăscălescu Șt. Hristache* (Focșani), *Jidanu C.* (Școala Polit., Timișoara), *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Segal Joe* (București), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Stoenescu D. Mirel* (lic. Milit, N. Filipescu), *Tilică C. Stefan* și *Vijelie Gh. Eugen* (lic Milit., N. Fipescu).

Soluția 3ª. In *„Trigonometria patratică"* p. 65 și 66 avem stabilite relațiile:

$$r = (r+p-a)\,sp\frac{A}{2}, \quad r_a = (r_a+p)\,sp\frac{A}{2}.$$

De aci deducem

$$(1) \qquad \frac{a(r+p-a)^2}{r^2} = \frac{a(r_a+p)^2}{r_a^2}$$

şi cum $p\,r = (p-a)\,r_a$, adică $\frac{r}{p-a} = \frac{r_a}{p}$ relaţia (1) devine

$$\frac{a(r+p-a)^2}{r(p-a)} = \frac{a(r_a+p)}{r_a\,p}.$$

care este prima relaţie din enunţ.

Relaţia 2ª se stabileşte ca în soluţiile precedente.

PROBLEME PROPUSE

1824 [1] — Să se determine poziţia de echilibru a unui sistem de forţe concurente $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ale căror intensităţi sunt în progresie aritmetică

$$F_i = k\,\frac{i}{n}\,\overline{M\,M_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad k = \text{const.},$$

punctele M_i fiind vârfurile unui poligon regulat înscris într'un cerc. La ce corespunde din punct de vedere mecanic cazul limită $n = \infty$?.

RADU BADESCU

1826. — Să se demonstreze că toate numerile din şirurile

$$100\ldots00955\ldots5561$$
$$711\ldots11822\ldots\ 224$$
$$899\ldots99400\ldots\ 001$$

sunt patrate perfecte.

G-L GH. BUICLIU

1827. — Să se găsească patratul perfect de forma $a\,b\,c\,d$, în care c, d, b formează o progresie aritmetică cu raţia pozitivă, iar $c^2 = b$.

C. V AMAN

1828. — Să se elimine x, y, z şi α din expresiunile:

$$\frac{(x-\alpha)(y-z)}{(x+\alpha)(y+z)} = u, \qquad \frac{(y-\alpha)(z-x)}{(y+\alpha)(z+x)} = v,$$
$$\frac{(z-\alpha)(x-y)}{(z+\alpha)(x+y)} = w.$$

IONEL I. STAMATE

1829. — Se dă triunghiul A B C ($A = 90^0$) şi fie A′, B′, C′ punctele unde bisectoarele interioare întâlnesc cercul circumscris. Notând cu s şi s' respectiv suprafeţele triunghiurilor A B C şi A′ B′ C′, să calculeze mărimea unghiurilor B şi C ca să avem:

$$\frac{s'}{s} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

STEFAN MUSTA

1830. — Se consideră trapezul A B C D, dreptunghic în A şi D. Presupunând că vârful A rămâne fix în timp ce latura B C, constantă ca mărime, alunecă pe direcţia B C într'un senz sau altul, se cere să se arate că:

1. Baza D C trece printr'un punct fix.
2. Aria triunghiului A D B rămâne constantă.
3. Dintre toate trapezele A B C D, să se construiască acela care are o arie maximă sau minimă.

VASILE VASU

1831. — Se dau patratele concentrice A B C D, $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ şi din O centrul lor comun se duce o semidreaptă variabilă O E, care taie în M şi N conturele celor două patrate. Din M şi N se duc paralele la B D (sau A C), care întâlnesc respectiv în P şi Q conturele romburilor $A\,B_1\,C\,D_1$, $A_1\,B\,C_1\,D$.

Dacă (X, Y) şi (X_1, Y_1) sunt coordonatele carteziene ale punctelor P şi Q faţă de sistemul de axe (A C, B D), se cere locul geometric al punctului R de coordonate

$$\begin{cases} x = X + X_1 \\ y = Y + Y_1, \end{cases}$$

când O E variază. Să se arate încă că, R se află necontenit pe O E.

V. ALACI

1832. — Să se afle formulele care exprimă *sinusul* şi *cosinusul pseudo-hiperbolic* al îndoitului şi al jumătăţii unui argument în funcţie de *sinusul* şi *cosinusul pseudo-hiperbolic* al acelui argument.

EUGEN VISA

[1] In problema 1824 propusă în numărul trecut, omiţându-se o parte din enunţ, o republicăm complect sub acelaşi număr.

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 19[illegible].

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait a Buenos Aires et dont les collaborations se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 286 articles, 249 notes et 1892 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIII, s'a primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următorul abonament:

1. *Prof. Ion Rizescu.* Str. Mihăileanu 18, Constanţa.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XIX, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XIX, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS
1 an: Belgique, **30 fr** France, **25 fr.**
Etranger, **7 belgas**

Administration
SPHINX, Bruxelles 173, Avenue Longchamp

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XX, care a început la 15 Martie 1940.

ANUL XX. APRILIE 1940 No. 2.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **D. V. IONESCU:** ASUPRA UNEI PROPRIETATI A DOMNULUI PROFESOR V. ALACI.
2. **EUGEN VISA:** FUNCTIUNI PSEUDO-HIPERBOLICE. STUDIU ELEMENTAR. (URMARE)
3. NOTE MATEMATICE: 3, 4, 5.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 543, 1704, 1707, 1712, 1727.
6. PROBLEME PROPUSE: 1833-1841.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Cu plăcere anunţăm că de la 15 Aprilie 1940 mai face parte dintre membrii *„Revistei Matematice din Timişoara"* şi distinsul nostru fost corespondent, azi inginer: Inginer *M. I. Predoescu,* dela Societatea *„Astra Română"*, Jud. Prahova.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XX, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIX inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XX — No 2 TIMISOARA, APRILIE 1940

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

ASUPRA UNEI PROPRIETĂȚI A DOMNULUI PROFESOR V. ALACI

DE

D. V. IONESCU

Profesor la Facultatea de Științe din Cluj.

1. Domnul Profesor *V. Alaci* a stabilit o proprietate geometrică simplă foarte interesantă,[1] pe care o voiu enunța în modul următor:

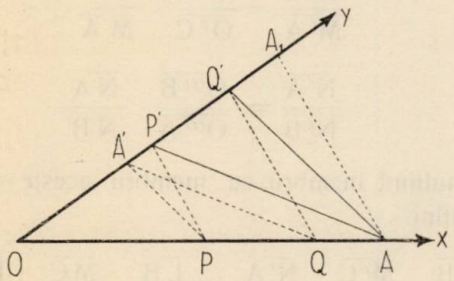


Fig. 1.

Două paralele întâlnesc laturile Ox, Oy *ale unui unghiu* O *în punctele* P, P' *și* Q, Q'. *A fiind un punct situat pe axa* Ox, *paralela dusă prin* P *la* AQ' *întâlnește paralela dusă prin* Q *la* AP' *într'un punct* A' *situat pe axa* Oy.

Demonstrația acestei proprietăți este simplă.[2] Să notăm cu A_1 punctul unde paralela dusă prin A la PP' întâlnește pe Oy și cu A' punctul unde paralela dusă prin P la AQ' întâlnește pe Oy.

Avem

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OQ'}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OA_1}}.$$

Din aceste egalități se deduce că

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}},$$

ceace dovedește că dreaptă QA' este paralelă cu dreapta AP'. Proprietatea Domnului Prof. *V. Alaci* este astfel demonstrată.

Observări. I. Punctul A' se poate considera ca transformatul lui A, prin constucția dată mai sus. Figura precedentă arată că transformatul lui A' este punctul A.

II. Să observăm că avem relația

$$\overline{OA'} \cdot \overline{OA_1} = \overline{OP'} \cdot \overline{OQ'}.$$

Ținând seama că

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}},$$

rezultă că:

$$\overline{OA'} \cdot \overline{OA} = \overline{OP} \cdot \overline{OQ'} = \overline{OP'} \cdot \overline{OQ} = \text{const.}$$

Această relație arată că transformarea precedentă dela punctul A la punctul A' este o transformare clasică, triunghiul OAA' având aria constantă.

Se știe că în acest caz dreapta AA' este tangentă la o iperbolă care are ca asimptote axele Ox, Oy și pe care o atinge într'un punct situat la mijlocul lui AA'.

III. Să observăm din figura precedentă că,

$$\overline{A'P'} = -\overline{AQ} \cdot \frac{\overline{OA'}}{\overline{OQ}}, \qquad \overline{A'Q'} = -\overline{AP} \cdot \frac{\overline{OA'}}{\overline{OP}}$$

și împărțind membru cu membru aceste relații avem

$$\frac{\overline{A'P'}}{\overline{A'Q'}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}. \tag{1}$$

In acest articol, voiu face o interesantă aplicație a formulei (1).

---

[1] *V. Alaci.* Transformarea rombică și antirombică. Transformările $(\overline{OA}, \varphi)$. „R. M. T." anul XIX N-rile 11 și 12, problemele de la pag 145 și 167.

[2] Relativ la această chestiune, a se vedea și articolul D-lui Prof. *O. N. Țino. Teoreme de geometrie, consecințe ale aplicațiunilor trigonometriei patratice.* „Rev. Mat. din Timișoara", anul XX, 1940, p. 3.

2. Pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC, luăm punctele L, M, N. Prin vârfurile A, B, C ale triunghiului ducem trei paralele oarecari şi luăm în planul triunghiului un punct oarecare O. Vom nota cu $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ cele trei paralele.

Dreptele Δ_b, Δ_c întâlnesc pe OL în punctele B_1 şi C_1. După proprietatea D-lui prof. *V. Alaci*, paralela dusă prin B_1 la OC întâlneşte paralela dusă prin C_1 la OB într'un punct L′ situat pe latura BC. In mod analog se ia intersecţia dreptelor Δ_a, Δ_c cu dreapta OM, care se notează cu A_2 şi C_2; paralela dusă din C_2 la OA întâlneşte paralela dusă din A_2 la OC într'un punct M′ situat pe dreapta AC. In sfârşit se notează cu B_3 şi A_3 intersecţiile lui Δ_b, Δ_a cu ON; paralela dusă din A_3 la OB întâlneşte paralelă dusă din B_3 la OA în punctul N′ situat pe AB.

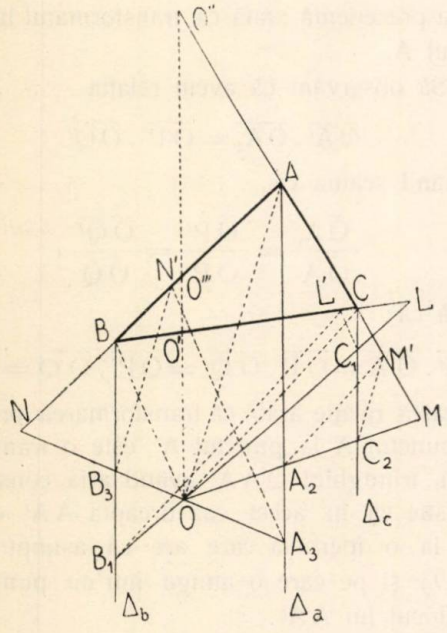


Fig. 2.

Să demonstrăm că punctele L′, M′, N′ satisfac la relaţia

$$(2)\qquad \frac{\overline{L'B}}{\overline{L'C}}\cdot\frac{\overline{M'C}}{\overline{M'A}}\cdot\frac{\overline{N'A}}{\overline{N'B}}=\frac{\overline{LB}}{\overline{LC}}\cdot\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}}\cdot\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}},$$

din care vom deduce proprietăţi interesante.

Să aplicăm formula 1 la unghiul BLO; vom avea

$$\frac{\overline{L'B}}{\overline{L'C}}=\frac{\overline{OC_1}}{\overline{OB_1}}\cdot\frac{\overline{LB_1}}{\overline{LC_1}}.$$

Să ducem prin O o paralelă la Δ_a care tae laturile BC, CA, AB în O′, O″, O‴. Avem

$$\frac{\overline{OC_1}}{\overline{OB_1}}=\frac{\overline{O'C}}{\overline{O'B}}.$$

Dreptele CC_1, BB_1 fiind paralele, avem

$$\frac{\overline{LB_1}}{\overline{LC_1}}=\frac{\overline{LB}}{\overline{LC}},$$

de unde rezultă că

$$\frac{\overline{L'B}}{\overline{L'C}}=\frac{\overline{O'C}}{\overline{O'B}}\cdot\frac{\overline{LB}}{\overline{LC}}.$$

La fel se demonstrează relaţiunile

$$\frac{\overline{M'C}}{\overline{M'A}}=\frac{\overline{O''A}}{\overline{O''C}}\cdot\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}},$$

$$\frac{\overline{N'A}}{\overline{N'B}}=\frac{\overline{O'''B}}{\overline{O'''A}}\cdot\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}.$$

Inmulţind membru cu membru aceste relaţiuni se obţine

$$\frac{\overline{L'B}}{\overline{L'C}}\cdot\frac{\overline{M'C}}{\overline{M'A}}\cdot\frac{\overline{N'A}}{\overline{N'B}}=\frac{\overline{LB}}{\overline{LC}}\cdot\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}}\cdot\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}},$$

deoarece, punctele O′, O″, O‴ fiind colineare, avem

$$\frac{\overline{O'C}}{\overline{O'B}}\cdot\frac{\overline{O'''B}}{\overline{O'''A}}\cdot\frac{\overline{O''A}}{\overline{O''C}}=1.$$

Formula (2) este astfel demonstrată.

Observare. Relaţia (2) ne arată că *produsul*

$$\frac{\overline{L'B}}{\overline{L'C}}\cdot\frac{\overline{M'C}}{\overline{M'A}}\cdot\frac{\overline{N'A}}{\overline{N'B}}$$

este independent de punctul O.

3. Din relaţia (2) rezultă că *dacă punctele* L, M, N *sunt colineare, atunci şi punctele* L′, M′, N′ *sunt colineare* şi *dacă dreptele* AL, BM, CN *sunt concurente, atunci şi dreptele* AL′, BM′, CN′ *sunt concurente.*

4. Iată o nouă aplicaţie a teoremelor precedente. Să considerăm un triunghiu ABC şi o dreaptă Δ

care trece printr'un punct O. Trei paralele duse prin A, B, C întâlnesc dreapta Δ în punctele A_1, B_1, C_1. Paralela dusă prin A_1 la OA, cu paralela dusă prin B_1 la OB şi cu paralela dusă prin C_1 la OC formează triunghiul $A'B'C'$.

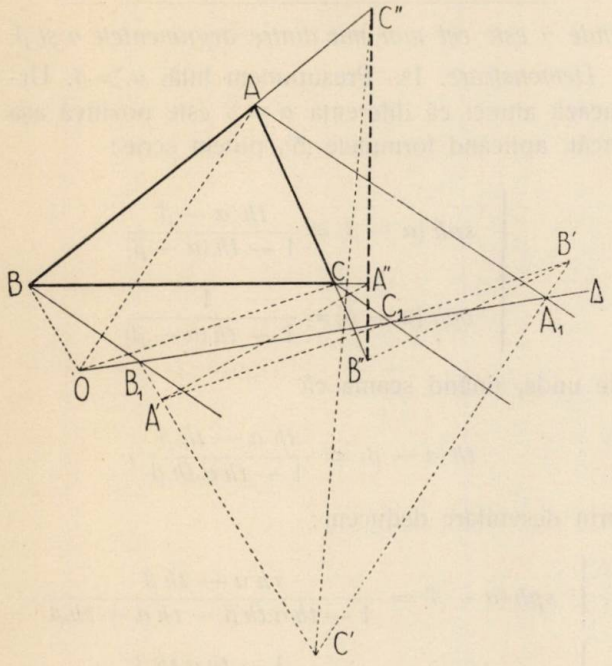


Fig. 3.

Proprietatea care vreau s'o pun în evidenţă este următoarea:

Simetricul lui A' *în raport cu mijlocul lui* B_1C_1 *se găseşte pe* BC; *simetricul lui* B' *în raport cu mijlocul lui* C_1A_1 *se găseşte pe* CA; *simetricul lui* C' *în raport cu mijlocul lui* A_1B_1 *se găseşte pe* AB; *aceste trei simetrice sunt colineare.*

Simetricul lui A' în raport cu mijlocul lui B_1C_1 este la intersecţia paralelei dusă prin B_1 la OC cu paralela dusă prin C_1 la OB. După proprietatea D-lui Prof. *V. Alaci* aceste două drepte se tae în punctul A'' pe BC.

Punctele A'', B'', C'' sunt colineare în virtutea proprietăţilor stabilite la No. 3.

Se mai deduce din figura precedentă proprietatea că, *dacă o dreaptă* Δ *tae laturile* $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ *ale unui triunghiu* $A'B'C'$ *în punctele* A_1, B_1, C_1, *simetricele punctelor* A', B', C' *în raport cu mijloacele segmentelor* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *sunt colineare,* proprietate desigur cunoscută.

FUNCŢIUNI PSEUDO-HIPERBOLICE.

STUDIU ELEMENTAR.

de

EUGEN VIŞA

(urmare)

CAP. II.

Formule de adiţiune.

11. Obiectul acestui capitol îl constitue problema exprimării *funcţiunilor pseudo-hiperbolice* ale unei sume algebrice de argumente, cu ajutorul *funcţiunilor pseudo-hiperbolice* ale termenilor ei.

De sigur, nu este locul să tratăm această problemă în toată generalitatea pe care o comportă. Considerăm însă că cele două teoreme fundamentale de mai jos împreună cu corolarele lor anexe vor fi suficiente pentru cadrul restrâns al studiului nostru.

12. Teorema I. *Dacă* α *şi* β *sunt două argumente de acelaş semn, avem relaţiile:*

$$(6)\qquad \boxed{\begin{aligned} sph(\alpha+\beta) &= sph\,\alpha\, cph\,\beta + cph\,\alpha\, sph\,\beta \\ cph(\alpha+\beta) &= cph\,\alpha\, cph\,\beta + sph\,\alpha\, sph\,\beta \end{aligned}}.$$

Demonstrare. 1°. Presupunem în primul rând că α şi β sunt pozitivi.

Aplicând formulele (5) dela (Cap. I, 10), putem scrie:

$$\begin{cases} sph(\alpha+\beta) = \dfrac{th(\alpha+\beta)}{1-th(\alpha+\beta)} \\ cph(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{1-th(\alpha+\beta)} \end{cases}$$

şi cum:

$$th(\alpha+\beta) = \frac{th\,\alpha + th\,\beta}{1+th\,\alpha\, th\,\beta}$$

aceste relaţii devin:

$$\begin{cases} sph(\alpha+\beta) = \dfrac{th\,\alpha + th\,\beta}{1 + th\,\alpha\, th\,\beta - th\,\alpha - th\,\beta} \\ cph(\alpha+\beta) = \dfrac{1 + th\,\alpha\, th\,\beta}{1 + th\,\alpha\, th\,\beta - th\,\alpha - th\,\beta} \end{cases}$$

de unde, printr'un artificiu de calcul uşor de urmărit, deducem:

$$\begin{cases} sph(\alpha+\beta) = \dfrac{th\,\alpha + th\,\beta}{(1-th\,\alpha)(1-th\,\beta)} \\ cph(\alpha+\beta) = \dfrac{1 + th\,\alpha\, th\,\beta}{(1-th\,\alpha)(1-th\,\beta)}. \end{cases}$$

Impărţind acum termenii fracţiilor din urmă prin produsul $(1 - th\,\alpha)(1 - th\,\beta)$ şi ţinând iarăşi seama de formulele (5), obţinem:

$$\begin{cases} sph(\alpha+\beta) = sph\,\alpha\, cph\,\beta + cph\,\alpha\, sph\,\beta \\ cph(\alpha+\beta) = cph\,\alpha\, cph\,\beta + sph\,\alpha\, sph\,\beta \end{cases}$$

adică, chiar relaţiile (6) în ipoteza dată.

2°. Presupunem acum în al doilea rând că α şi β sunt negativi.

Aplicând formulele (6) pentru cazul argumentelor $-\alpha$ şi $-\beta$, cari sunt evident pozitive, avem:

$$\begin{cases} sph(-\alpha-\beta) = sph(-\alpha)\, cph(-\beta) + cph(-\alpha)\, sph(-\beta) \\ cph(-\alpha-\beta) = cph(-\alpha)\, cph(-\beta) + sph(-\alpha)\, sph(-\beta) \end{cases}$$

şi ţinând seama că *sinusul pseudo-hiperbolic* este funcţie impară, iar *cosinusul pseudo-hiperbolic*, funcţie pară, deducem:

$$\begin{cases} sph(\alpha+\beta) = sph\,\alpha\, cph\,\beta + cph\,\alpha\, sph\,\beta \\ cph(\alpha+\beta) = cph\,\alpha\, cph\,\beta + sph\,\alpha\, sph\,\beta \end{cases}$$

ceeace ne spune că formulele (6) sunt aplicabile şi în cazul argumentelor negative.

13. **Corolar.** *Dacă α şi β sunt două argumente de semne contrari, avem relaţiile:*

$$(7)\quad \boxed{\begin{array}{l} sph(\alpha-\beta) = sph\,\alpha\, cph\,\beta - cph\,\alpha\, sph\,\beta \\ cph(\alpha-\beta) = cph\,\alpha\, cph\,\beta - sph\,\alpha\, sph\,\beta \end{array}}.$$

In adevăr, considerând argumentele α şi $-\beta$, cari sunt de acelaş semn şi aplicând formulele (6) pentru suma $\alpha + (-\beta) = \alpha - \beta$, avem:

$$\begin{cases} sph(\alpha-\beta) = sph\,\alpha\, cph(-\beta) + cph\,\alpha\, sph(-\beta) \\ cph(\alpha-\beta) = cph\,\alpha\, cph(-\beta) + sph\,\alpha\, sph(-\beta) \end{cases}$$

de unde, ţinând şi de astă dată seama de imparitatea *sinusului pseudo-hiperbotic* şi de paritatea *cosinusului pseudo-hiperbolic*, relaţiile (7) rezultă imediat.

14. **Teorema II.** *Dacă α şi β sunt două argumente pozitive, avem relaţiile:*

$$(8)\quad \boxed{\begin{array}{l} sph(\alpha-\beta) = \dfrac{sph\,\alpha\, cph\,\beta - cph\,\alpha\, sph\,\beta}{1 + 2\, sph\,\gamma} \\ cph(\alpha-\beta) = \dfrac{cph\,\alpha\, cph\,\beta - sph\,\alpha\, sph\,\beta}{1 + 2\, sph\,\gamma} \end{array}}$$

unde γ este cel mai mic dintre argumentele α şi β.

Demonstrare. 1°. Presupunem întâi $\alpha > \beta$. Urmează atunci că diferenţa $\alpha - \beta$ este pozitivă aşa încât, aplicând formulele (5), putem scrie:

$$\begin{cases} sph(\alpha-\beta) = \dfrac{th(\alpha-\beta)}{1 - th(\alpha-\beta)} \\ cph(\alpha-\beta) = \dfrac{1}{1 - th(\alpha-\beta)} \end{cases}$$

de unde, ţinând seama că

$$th(\alpha-\beta) = \frac{th\,\alpha - th\,\beta}{1 - th\,\alpha\, th\,\beta},$$

prin desvoltare deducem:

$$\begin{cases} sph(\alpha-\beta) = \dfrac{th\,\alpha - th\,\beta}{1 - th\,\alpha\, th\,\beta - th\,\alpha + th\,\beta} \\ cph(\alpha-\beta) = \dfrac{1 - th\,\alpha\, th\,\beta}{1 - th\,\alpha\, th\,\beta - th\,\alpha + th\,\beta}. \end{cases}$$

Făcând şi de astădată unele grupări convénabile, avem:

$$\begin{cases} sph(\alpha-\beta) = \dfrac{th\,\alpha - th\,\beta}{(1-th\,\alpha)(1-th\,\beta) + 2\, th\,\beta\,(1-th\,\alpha)} \\ cph(\alpha-\beta) = \dfrac{1 - th\,\alpha\, th\,\beta}{(1-th\,\alpha)(1-th\,\beta) + 2\, th\,\beta\,(1-th\,\alpha)} \end{cases}$$

şi împărţind iarăşi termenii fracţiilor din urmă prin produsul $(1-th\,\alpha)(1-th\,\beta)$, în baza formulelor (5), obţinem:

$$(8')\quad \begin{cases} sph(\alpha-\beta) = \dfrac{sph\,\alpha\, cph\,\beta - cph\,\alpha\, sph\,\beta}{1 + 2\, sph\,\beta} \\ cph(\alpha-\beta) = \dfrac{cph\,\alpha\, cph\,\beta - sph\,\alpha\, sph\,\beta}{1 + 2\, sph\,\beta}, \end{cases}$$

adică chiar relaţiile (8) pentru cazul când $\alpha > \beta$.

2°. Presupunem acum $\alpha < \beta$. Intervertind în (8') rolurile lui α şi β, avem:

$$\begin{cases} sph(\beta-\alpha) = \dfrac{sph\,\beta\,cph\,\alpha - cph\,\beta\,sph\,\alpha}{1+2\,sph\,\alpha} \\ cph(\beta-\alpha) = \dfrac{cph\,\beta\,cph\,\alpha - sph\,\beta\,sph\,\alpha}{1+2\,sph\,\alpha}. \end{cases}$$

Cum însă

$$sph(\beta-\alpha) = -\,sph(\alpha-\beta)$$
$$cph(\beta-\alpha) = cph(\alpha-\beta),$$

vom putea scrie:

$$\begin{cases} sph(\alpha-\beta) = \dfrac{sph\,\alpha\,cph\,\beta - cph\,\alpha\,sph\,\beta}{1+2\,sph\,\alpha} \\ cph(\alpha-\beta) = \dfrac{cph\,\alpha\,cph\,\beta - sph\,\alpha\,sph\,\beta}{1+2\,sph\,\alpha} \end{cases}$$

relații cari nu sunt decât formulele (8) pentru cazul când $\alpha < \beta$.

15. Corolar. *Dacă α și β sunt două argumente negative, avem relațiile:*

$$(9)\qquad \boxed{\begin{array}{l} sph(\alpha-\beta) = \dfrac{sph\,\alpha\,cph\,\beta - cph\,\alpha\,sph\,\beta}{1-2\,sph\,\gamma} \\ cph(\alpha-\beta) = \dfrac{cph\,\alpha\,cph\,\beta - sph\,\alpha\,sph\,\beta}{1-2\,sph\,\gamma} \end{array}}$$

unde γ este cel mai mare dintre argumentele α și β.

In adevăr, să considerăm argumentele $-\alpha$ și $-\beta$, cari sunt evident pozitive. Cel mai mic dintre aceste argumente va fi atunci $-\gamma$.

Aplicând formulele (8) pentru cazul diferenței $(-\beta)-(-\alpha) = \alpha-\beta$, avem:

$$\begin{cases} sph(\alpha-\beta) = \dfrac{sph(-\beta)\,cph(-\alpha) - cph(-\beta)\,sph(-\alpha)}{1+2\,sph(-\gamma)} \\ cph(\alpha-\beta) = \dfrac{cph(-\beta)\,cph(-\alpha) - sph(-\beta)\,sph(-\alpha)}{1+2\,sph(-\gamma)} \end{cases}$$

de unde, ținând seama de aceeași observație din cazul corolarului primei teoreme, deducem,

$$\begin{cases} sph(\alpha-\beta) = \dfrac{sph\,\alpha\,cph\,\beta - cph\,\alpha\,sph\,\beta}{1-2\,sph\,\gamma} \\ cph(\alpha-\beta) = \dfrac{cph\,\alpha\,cph\,\beta - sph\,\alpha\,sph\,\beta}{1-2\,sph\,\gamma}, \end{cases}$$

adică chiar formulele (9), cari sunt în felul acesta și ele stabilite.

CAP. III.

Derivatele funcțiunilor pseudo-hiperbolice.

16. Lemă. *Raportul dintre sinusul pseudo-hiperbolic al unui argument și însuși argumentul, tinde către unitate când argumentul tinde către zero.*

Demonstrare. Observăm în primul rând că este suficient a stabili propoziția pentru cazul unui argument pozitiv, deoarece *sinusul pseudo-hiperbolic* este funcție impară și are același semn ca și argumentul corespunzător.

Fie atunci α un argument pozitiv oarecare. Raportându-ne la (fig. 2) avem că:

$$sph\,\alpha > \alpha\,sh\,\alpha$$

și cum pe de altă parte:

$$sh\,\alpha > \alpha > th\,\alpha,$$

rezultă:

$$sph\,\alpha > \alpha > th\,\alpha$$

de unde împărțind cu $sph\,\alpha$, care este pozitiv, obținem:

$$1 > \frac{\alpha}{sph\,\alpha} > \frac{1}{cph\,\alpha}.$$

Când α tinde către zero, $\dfrac{1}{cph\,\alpha}$ tinde însă către 1. Urmează atunci că raportul $\dfrac{\alpha}{sph\,\alpha}$, rămânând cuprins între unitate și o cantitate variabilă a cărei limită este tot unitatea, el însuși va tinde către unitate. Intrucât același lucru se poate spune și despre inversul acestui raport, în definitiv avem că:

$$(10)\qquad \boxed{\lim_{\alpha=0} \frac{sph\,\alpha}{\alpha} = 1}$$

și propoziția enunțată este prin urmare stabilită.

Derivata funcțiunii $y = sph\,x$.

17. Teoremă. *Derivata funcțiunii $y = sph\,x$, este*

$$(11)\qquad \boxed{y' = cph\,x \pm sph\,x}$$

unde se ia respectiv semnul + sau —, după cum argumentul x este și el pozitiv sau negativ.

Demonstrare. Presepunând stabilită formula de derivare din (11) corespunzătoare lui x pozitiv, aceea corespunzătoare lui x negativ se deduce imediat.

In adevăr, fie x un argument negativ oarecare. Avem evident:

$$x = -|x|,$$

unde am notat prin $|x|$ valoarea absolută a lui x.

Atunci, utilizând încă notaţia diferenţială, în ipoteza considerată, vom putea scrie:

$$\frac{d\,sph|x|}{d|x|} = cph|x| + sph|x|$$

şi cum $d|x| = -dx$, iar

$$sph|x| = -sph\,x \quad \text{şi} \quad cph|x| = cph\,x,$$

relaţia precedentă devine:

$$\frac{d\,sph\,x}{dx} = cph\,x - sph\,x$$

aşa încât aserţiunea făcută este învederată.

Să stabilim prin urmare formula de derivare din (11) corespunzătoare lui x pozitiv.

Fie pentru aceasta Δx o creştere oarecare dată variabilei şi Δy creşterea corespunzătoare a funcţiunii. După cum se ştie, avem relaţia:

$$\Delta y = sph(x + \Delta x) - sph\,x. \tag{12}$$

Vom deosebi acum două cazuri, după cum Δx este respectiv de acelaş semn cu x, adică pozitiv, sau de semn contrar, adică negativ.

1°. Presupunem mai întâi $\Delta x > 0$. Desvoltând al doilea membru al relaţiei (12) după prima formulă din (6) (Cap. II, 12), obţinem:

$$\Delta y = sph\,x\,cph\,\Delta x + sph\,\Delta x\,cph\,x - sph\,x$$

ceeace se mai poate scrie şi sub forma:

$$\Delta y = sph\,x\,(cph\,\Delta x - 1) + sph\,\Delta x\,cph\,x.$$

Cum însă, în virtutea formulei (4) (Cap. I, 9), avem că:

$$cph\,\Delta x - 1 = sph\,\Delta x,$$

deducem:

$$\Delta y = sph\,x\,sph\,\Delta x + sph\,\Delta x\,cph\,x$$
$$= sph\,\Delta x\,(cph\,x + sph\,x)$$

de unde, prin împărţirea cu Δx şi trecerea la limită pentru $\Delta x = 0$, în cele din urmă rezultă:

$$y' = cph\,x + sph\,x$$

deoarece

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{sph\,\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

2°. Presupunem acum $\Delta x < 0$.

Notând valoarea absolută a lui Δx prin $|\Delta x|$, relaţia (12) devine:

$$\Delta y = sph(x + \Delta x) - sph\,x = sph(x - |\Delta x|) - sph\,x$$

de unde, prin desvoltarea celui de al doilea membru după prima formulă din (8) (Cap. II, 12), obţinem:

$$\Delta y = \frac{sph\,x\,cph|\Delta x| - cph\,x\,sph|\Delta x|}{1 + 2\,sph|\Delta x|} - sph\,x$$

şi trecând dela valorile absolute la cele relative, deducem:

$$\Delta y = \frac{sph\,x\,cph\,\Delta x + cph\,x\,sph\,\Delta x}{1 - 2\,sph\,\Delta x} - sph\,x.$$

In cazul de faţă avem însă:

$$cph\,\Delta x = 1 - sph\,\Delta x$$

aşa încât ultima relaţie se scrie:

$$\Delta y = \frac{sph\,\Delta x\,(cph\,x + sph\,x)}{1 - 2\,sph\,\Delta x}$$

şi împărţind iarăşi cu Δx, apoi făcând pe Δx să tindă către zero, la limita obţinem:

$$y' = cph\,x + sph\,x$$

adică acelaş rezultat ca şi în ipoteza cazului precedent.

Teorema enunţată este, în modul acesta complect demonstrată.

Derivata funcţiunii $y = cph\,x$.

18. Teoremă. *Derivata funcţiunii $y = cph\,x$, este*

$$\boxed{y' = \pm\,(cph\,x \pm sph\,x)} \tag{13}$$

unde semnele superioare corespund cazului când argumentul x este pozitiv, iar cele inferioare, cazului când acest argument este negativ.

Demonstrare. Derivând relaţiile (4) şi (4′) dela (Cap. I, 8), formula de derivare (13) rezultă imediat.

19. *Observare.* Formulele de derivare (11) şi (13) stabilite în cele ce preced, le mai puteam obţine şi încă mult mai uşor, plecând dela formulele (5) şi (5′) (Cap. I, 10), cari exprimă *sinusul* şi *cosinusul pseudo-hiperbolic* în funcţie de tangenta hiperbolică.

Dată fiind însă importanţa metodei utilizate, am preferat-o pe aceasta.

(va urma)

NOTE MATEMATICE

3. — *Une solution à deux paramètres de l'équation* $x^3+y^3+z^3-3xyz=u^3$.

Des formules données par *Carmichael* (V. C. Analyse indéterminée, 1929, page 68) pour résoudre l'équation diophantique

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=u^3+v^3+w^3-3uvw,$$

je déduis en posant $v=w=0$, les suivantes pour l'équation ci-dessus:

$$\begin{cases} x=(r^2+3s^2)^2+2r \\ y=(r^2+3s^2)^2-r-3s \\ z=(r^2+3s^2)^2-r+3s \\ u=3\,r^2+3s^2) \end{cases}$$

r	s	
2	1 :	$53^3+50^3+44^3-3.53.50.44=21^3$
4	1 :	$123^3+120^3+118^3-3.123.120.118=19^3$
3	2 :	$149^3+144^3+148^3-3.149.144.148=21^3$
3	1 :	$25^3+24^3+23^3-3.25.24.23=6^3$.

Remarquons que, dans le dernier exemple, $x\,y$ et z sont des entiers consécutifs.

Notons encore que le 1er et le 3^e exemple nous donnent une solution numérique du système

$$x_1^3+y_1^3+z_1^3-3x_1y_1z_1=x_2^3+y_2^3+z_2^3-$$
$$3x_2y_2z_2=u^3.$$

Note. D'autres procédés de résolution de la même équation que nous avons établi seront publiés dans le prochain numéro du *Sphinx*.

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

4. — *Asupra coordonatelor hiperbolice.*

Intr'o scrisoare ce a binevoit a-mi adresa D-l Profesor *Nicolae Abramescu* îmi atrage atenţiunea asupra faptului că cele expuse de subsemnatul în articolul „*Coordonate hiperbolice*“ publicat în „R.M.T.“ Vol. XIX, pag. 160 - 164, sunt chestiuni cunoscute, ele găsindu-se în lucrarea lui *P. Mansion: Précis de la théorie des fonctions hyperboliques*, 1884 (Gand, Imprimérie A. Hoste) şi că, chiar mai înainte încă, au fost preconizate de *Riccati* (1707-1775).

De sigur, nu pot decât să mulţumesc D-lui Prof. *Abramescu* pentru întâmpinarea făcută, pe care în felul acesta vreau s-o aduc la cunoştinţă publică. Ţin să declar însă că, subsemnatul nu am avut cunoştinţă nici de lucrarea lui *Mansion*, nici de preconizările lui *Riccati*, articolul în chestiune alcătuindu-l absolut independent.

De altfel, după cum menţionam şi în cuprinsul lui, am conceput acest articol în vederea unei alte lucrări ce întreprind. De astă dată pot chiar să precizez că el vizează anume, unele aplicaţii ale *funcţiunilor pseudo-hiperbolice*, asupra cărora un prim studiu l-am început chiar în numărul trecut al acestei reviste.

EUGEN VISA

5. — *Asupra transformării prin polare reciproce.*

1. Fiind dat un punct P, se ştie că polara sa faţă de cercul cu centrul O este o dreaptă (D) perpendiculară pe diametrul O P. Insemnând cu Q punctul de intersecţie al polarei (D) cu O P, punctele P şi Q sunt conjugate armonic faţă de cercul O. Să considerăm un punct M al dreptei (D).

Acest punct fiind pe polara lui P, este conjugatul armonic al lui P în raport cu cercul.

Deci polara lui M trece prin P şi prin urmare polarele punctelor unei drepte (D) trec prin polul P al acestei drepte. De asemenea, polurile dreptelor care trec prin P sunt pe polara lui P.

Deci, polul unei drepte este intersecţia polarelor a două din punctele sale şi polara unui punct este dreapta care uneşte polurile a două drepte care trec prin acel punct.

2. Se vede deci că la puncte în linie dreaptă corespund drepte concurente în polul dreptei, şi la drepte concurente într'un punct, corespund puncte în linie dreaptă pe polara acelui punct.

Pe această proprietate se bazează metoda transformării prin polare reciproce în raport cu cercul director. Astfel că, la punctele şi dreptele unei figuri (F), facem să corespundă dreptele şi punctele figurii (F'), obţinută luând polarele şi polurile punctelor şi dreptelor figurii (F) în raport cu cercul director.

Figurile (F) şi (F′) se zic polare reciproce şi (F) se obţine din (F′) după cum (F′) a fost obţinută din (F).

3. O altă proprietate este următoarea. Fie (D) şi (D′) două drepte şi P şi P′ polurile lor în raport cu cercul de centru O. Dreptele O P şi O P′ fiind respectiv perpendiculare pe (D) şi (D′), unghiul lor este egal cu cel al dreptelor (D) şi (D′).

Deci, unghiul a două drepte este egal cu acela format de dreptele care unesc centrul O cu polurile acestor drepte.

Astfel, transformând prin polare reciproce, în raport cu cercul de centru O proprietatea că, înălţimile triunghiului A′ B′ C′ sunt concurente, se obţine un triunghiu A B C polarul reciproc al lui A′ B′ C′, adică A este polul lui B′ C′, B polul lui C′ A′ şi C polul lui A′ B′ şi observând Nr. 3, se obţine proprietatea *că perpendicularele ridicate în* O *pe dreptele* O A, O B, O C *taie laturile opuse* B C, C A, A B, *respectiv în trei puncte coliniare pe polara ortocentrului* A′ B′ C′ *în raport cu cercul* O.

4. Se mai cunosc şi alte aplicaţii, între care este teorema lui *Brianchon* dedusă din aceea a lui *Pascal*. Considerând exagonul A B C D E F înscris într'un cerc (sau conică) şi notând laturile consecutive cu 1, 2, 3, 4, 5, 6, se ştie dela teorema lui *Pascal* că dreptele 1 şi 4, 2 şi 5, 3 şi 6 se taie în trei puncte coliniare pe dreapta (L). Ducând tangentele la cerc (sau conică) în vârfurile exagonului, se obţine un exagon circumscris A′ B′ C′ D′ E′ F′, astfel că A′, B′,... sunt polurile dreptelor A B, B C,...

Dreapta care uneşte pe A′ cu D′ este polara punctului de intersecţie al dreptelor A B şi D E. Cum aceste trei puncte sunt coliniare (teorema lui *Pascal*), rezultă că dreptele A′ D′, B′ E′, C′ F′ se taie în acelaşi punct, polul dreptei (L), (Teorema lui *Brianchon*.

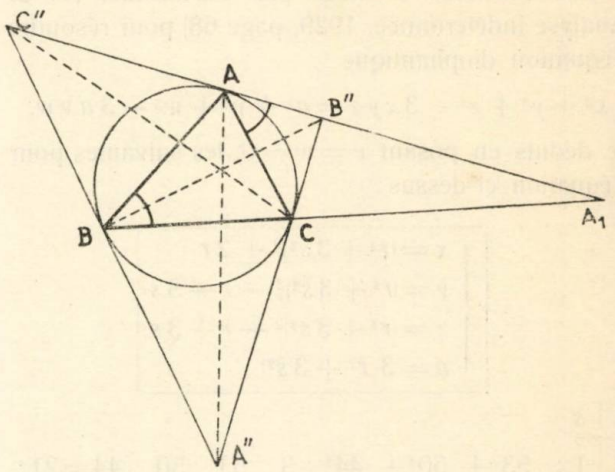
Altă aplicaţie. Fie A B C un triunghiu înscris în cercul O şi A″ B″ C″ triunghiul format de tangentele în A, B, C la cerc.

Tangenta în A la cerc taie pe B C în A_1 şi observând asemănarea triunghiurilor A_1 C A şi A_1 A B, avem

$$\frac{A_1C}{A_1A}=\frac{A_1A}{A_1B}=\frac{AC}{AB},$$

$$\frac{A_1C}{A_1A}=\frac{AC}{AB},\qquad \frac{A_1A}{A_1B}=\frac{AC}{AB},$$

$$\frac{A_1C\cdot A_1A}{A_1A\cdot A_1B}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}\quad\text{sau}\quad\frac{A_1C}{A_1B}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}.$$



Pentru celelalte puncte B_1, C_1 avem

$$\frac{B_1A}{B_1C}=\frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2},\qquad \frac{C_1B}{C_1A}=\frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2},$$

de unde prin înmulţire

$$\frac{A_1C}{A_1B}\cdot\frac{B_1A}{B_1C}\cdot\frac{C_1B}{C_1A}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}\cdot\frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2}\cdot\frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2}=1.$$

Deci punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare pe (L).

Dar A″ este polul lui B C, iar A este polul tangentei A A_1, deci A_1 este polul dreptei A A″ căci este la intersecţia polarelor lui A şi A″. Prin urmare, polarele punctelor A_1, B_1, C_1 sunt dreptele A A″, B B″, C C″. Cum A_1, B_1, C_1 sunt coliniare urmează că dreptele A A″, B B″, C C″ sunt concurente.

Acestea sunt simedianele triunghiului A B C şi se taie în punctul lui *Lemoine*.

MARIANA BRAMESCU
(Profesoară la Lic. Com de Fete, Oradia

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică. Antioh Cantemir*, de *I. Ionescu Gheorghe Ţiţeica*, de *Gh. Th. Gheorghiu*. O generalizare a relaţiilor din triunghiul dreptunghiu, de *N. N. Mihăileanu*. Concursul „Gazetei Matematice". Premiu de aritmetică. Note, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Annalles scientifiques de l'Université de Iassy*, Tome XXVI, an. 1940. Le professeur *Nicolae Costăchescu*, de

C. Gheorghiu. Sur les surfaces congruentes à leurs parallèles, par *N. Cernov.* Sur les surfaces réglées par *O. Mayer.* Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della fizica matematica. Mai sunt şi articole interesante de Fizică şi Chimie.

3. *Boletin Matematico,* anul XII, No. 19, Decemvrie 1939, *Buenos-Aires.* Al XII[lea] an al Buletinului Matematic, de *B. I. Baidaff.* Activitatea Buletinului Matematic în numere. O teoremă asupra singularităţilor seriei lui *Dirichlet,* de *C. Biggeri.* O teoremă de geometrie plană, de *G. Vivanti.* Rezolvarea unei ecuaţii funcţionale depinzând de o condiţie suplimentară, de *T. Vescan.* Identitatea $2(A^{2i}+B^{2i}+C^{2i})+B^{2i}+E_1^i+E_2^i+E_3^i=2(F^i+G^i+H^i)+K_1^i+K_2^i+K_3^i+K_4^i$, pentru $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$, de *A. Moessner.* Notă relativă la răspunsul dat de *J. Mahrenholz* la o chestiune de *A. Moessner,* de *A. Gloden.* O privire asupra unei teze de doctorat în ştiinţele fizice, de *B. I. Baidaff.*

4. *Pitagora,* revistă de matematici, anul V, No. 6, Martie 1940. Relaţiuni într'un patrulater, de *Ad. Gheorghiu* Criterii elementare pentru recunoaşterea naturii conicelor, de *V. Ghiţescu* O corespondenţă a punctelor curbei

$$y=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,$$

de *Marg. Caracudovici.* Note, probleme rezolvate şi propuse.

5. *Ştiinţă şi Progres,* anul VI, No. 2, Ianuarie - Martie, 1940. Mecanica ondulatoare şi aplicaţiile ei, de Prof. *Valer Novac.* Munţii Vâlcului, de Prof. *V Cocoş.* Emisiunea electronică, de Elev *Catrina C-tin.* Din organizarea departamentului picturilor din muzeul Luvru, de Prof. *Daniel Popescu.* Materia şi radiaţiunile spectrale, de Elev *D. Săndulescu.* Vitamine, de Elev *Cioc I. D-tru.* Dematerializarea materiei, de Elev *Zaharia N. Octov.* Măsurarea înălţimelor cu barometru, de Elev. Ing. *Zeno Centea.* Probleme propuse.

6. *Coleccion de Problemas de Algebra,* agreglada por *A. G Ioachimescu,* Ingeniero, Profesor, Miembro fondator de la *Revista „Gazeta Matematica".* Traducida de la cuorta edition Rumana par *B. I. Baidaff,* Doctor en ciencias Fizico-Matematicas, Profesor, Fundator de la Revista *Boletin Matematico.* Buenos-Aires, 1940.

7. *Th. Anghelutză* Sur une propriété des polynomes. (Extrait du Bulletin des Sciences Mathématiques).

8. *Nicolas Abramescu.* Nouvelle méthode pour obtenir la cubique qui donne les tangentes de *Darboux* en un point d'une surface.

9. *Nicolas Abramescu.* Nouvelles propriétés de la quartique piriforme déduite comme le lieu du centre instantané de mouvement d'une figure plane variable avec conservation de similitude.

10. *Nicolas Abramescu.* L'apolarité d'une forme binaire et d'une forme cubique. Application à la théorie des surfaces.

11. *Profesor N. Abramescu.* Complectări de geometrie elementară. Conţine interesante chestiuni de geometrie, stabilite extrem de simplu şi este de un real folos studenţilor noştrii.

12. *Vincenzo G. Cavallaro.* Ricerche sulle Sezioni dei Diedri. (Estratto dal Bolletino di Matematica, Anno 1925.)

13 *Vincenzo G. Cavallaro.* Notes sur la Géométrie du triangle. (Extrait du „Bulletin Scientique de l'École Polytechnique de Timişoara, Tome 9, Fasc. 3—4).

14 *Vincenzo G Cavallaro.* La Trigonometria quadratica. (Estratto dalla „Rivista di Fizica, Metematica e Scienze Naturali, Anno 14, Novembre 1939, No. 2).

15 *Fabio Pretti* (a Genova). La funzione „Valore Assoluto" in Geometria proiettiva. (Estratto del Giornale di Matematiche di *Battaglini* a cura del Prof. *Ernesto Pascal,* Volume LXXVI, 1938).

INŞTIINŢARE [1].

Domnul Director al liceului „Ion Maiorescu" *din* Giurgiu *a recomandat pe elevul* Petrescu R. Gheorghe *din clasa VII-a ştiinţifică pentru a primi drept premiu pe anul 1940-1941 un abonament la* „Revista Matematică din Timişoara".

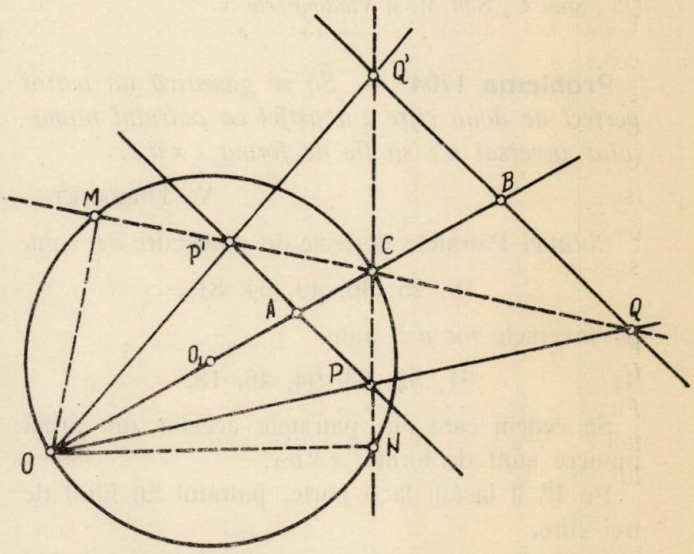
Pentru acest an premiul poartă numele „Vasile Niculescu".

PROBLEME REZOLVATE

Problema 543. — *Se dau punctele* O, A *şi* B *în linie dreaptă. Prin punctele* A *şi* B *se duc două drepte paralele cu o direcţie dată. O dreaptă mobilă în jurul lui* O, *taie dreptele duse prin* A *şi* B *în punctele* P *şi* Q. *Fie* P' *şi* Q', *simetricele lor în raport cu punctele* A *şi* B. *Se cere locul geometric al proecţiunei punctului* O *pe dreptele* P Q' *şi* Q P'.

A. Coman

Diagonalele P Q', Q P' ale trapezului P P' Q' Q se întâlnesc în un punct C pe mediana O A B a



trapezului. Din asemănarea triunghiurilor A P' C şi B Q C se scoate

$$(1)\qquad \frac{AP'}{BQ}=\frac{AC}{CB}.$$

[1]) A se vedea „R. M. T." anul XVII, pag. 100, lămuriri pentru instituirea premiului.

Dar AP' fiind prin construcţie egal cu AP, (1) se înlocueşte prin

$$(2) \qquad \frac{AP}{BQ} = \frac{AC}{CB}.$$

AP şi BQ fiind paralele, din triunghiurile POA, QOB scoatem

$$(3) \qquad \frac{AP}{BQ} = \frac{AO}{BO} = \text{constant}.$$

Comparând (3) cu (2), avem

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AO}{BO} = \text{constant},$$

deci punctul C este fix, şi atunci rezultă că proecţiile M şi N ale lui O pe QC şi PC descriu cercul de diametru OC.

Bune soluţii geometrice analoage s-au primit de la d-nii: *Bârs-Sibiel D. P., Bordeianu Ad., Călniceanu Gh. Gh., Costăchescu V. C., Dănciulescu Gr. V., Dinu S. D., Dumitrescu I. E., Gradin Gh., Ionescu-Bujor Th. C., Iovănescu F., Manolescu I. N., Mihăileanu N N., Nestor D., Panaite N. T., Savin C. I., Simiona P. K., Stan I. A., Winkler A., Zagaican I.* şi *Zamfirescu Gh I.*

Soluţiuni analitice de la d-nii: *Bârs-Sibiel D. P., Drăgan Gh., Frumuşelu H. Gh., Mihăileanu N. N., Morţun Em., Petrovici D., Podariu Ad., Popescu C. V., Sprinceană Gh., Stan C., Süli M.* şi *Vladimirschi V.*

Problema 1704. — *Să se găsească un patrat perfect de două cifre $z\,u$ astfel ca patratul numărului inversat $u\,z$ să fie de forma $z\,x\,u\,x$.*

V. THÉBAULT

Soluţie. Patratele perfecte de două cifre $z\,u$ sunt,

$$16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,$$

iar inversele lor $u\,z$, sunt

$$(1) \qquad 61,\ 52,\ 63,\ 94,\ 46,\ 18.$$

Să vedem care din patratele acestor din urmă numere sunt de forma, $z\,x\,u\,x$.

Pe 18 îl lasăm la o parte, patratul lui fiind de trei cifre.

Patratele numerilor rămase din şirul (1) trebuind să aibă prima cifră z, adică respectiv 1, 2, 3, 4, 6, vom elimina din şirul (1) pe 61, 99, 46, care nu sunt satisfac această condiţie.

Rămân din (1) numai numerile, 52 şi 63, ale căror patrate sunt

$$52^2 = 2704, \quad 63^2 = 3969.$$

Numai ultimul patrat este de forma $z\,x\,u\,x$, deci singura soluţie este,

$$z\,u = 36.$$

Soluţii date de d-rele: *Checian N. Ana* (lic Carmen-Sylva, Timişoara), *Papadopol D. Elena* (lic. de fete, Bacău) şi de d-nii: *Anastasiu M. Dan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Aniţescu N. Nicolae*, *Anton G.* (Năsăud), *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timişoara), *Bârlea V. Suhăţeanu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Boiangiu D.* (lic. T-Severin), *Borneas Marius* (lic. Arad), *Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Cristea I. Nicolae* (lic. Blaj), *Cristescu Dan* (Braşov), *Dascălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Dragomir Adrian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Hermann I. Carol* (Blaj), *Jidanu I. C-tin* (Şc Polit. Timişoara), *Luca I. I.* (lic. Arad), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt, Roman), *Matei I. Augustin* (student, Cluj), *Matei M. Chintescu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Mihăileanu Andrei-Călin* (lic. Arad), *Mihoc Ovidiu*, *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Mureşan I. Octavian* (lic. Arad), *Popescu V. C-tin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Şandor Vasile*, *Schapira Salo* (lic. Piatra-Neamţ), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Selmeneanu L. Honig* (lic. Orăştie), *Serban I. C-tin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Stamate I. Ionel* (student, Cluj), *Ştefănescu F. Marin* (Sub-Lt, Alba-Iulia), *Tătaru Alexandru* (lic. Orăştie), *Văduva F. Marin* (lic. Giurgiu), *Venter D-tru* (lic. Beiuş) *Vijelie Gh. Eugen* (lic. Milit., N. Filipescu).

Problema 1707. — *Să se determine α astfel ca rădăcinele ecuaţiei*

$$x^2 y + x y^2 - x - y - \alpha x y + \alpha = 0$$

să fie egale şi să se calculeze în acest caz rădăcinele.

S-LT MARIN P. TICA

Soluţie. Ecuaţia se poate pune sub forma

$$(x + y - \alpha)(x y - 1) = 0.$$

De aci deducem

$$(1) \quad \begin{cases} x + y = \alpha \\ x y = 1 + k \end{cases} \qquad \text{sau:} \qquad (2) \quad \begin{cases} x + y = \alpha + k' \\ x y = 1 \end{cases}$$

unde k şi k' sunt numere arbitrare.

Având suma şi produsul lui x, y putem forma ecuaţiile de gradul al 2-lea

$$(1') \qquad z^2 - \alpha z + 1 + k = 0$$

$$(2') \qquad z^2 - (\alpha + k')z + 1 = 0,$$

echivalente respectiv sistemelor (1) şi (2).

Rezolvind aceste ecuaţii (1') şi (2'), avem respectiv

$$(3) \qquad x, y = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4(1 + k)}}{2},$$

$$(4) \qquad x, y = \frac{\alpha + k' \pm \sqrt{(\alpha + k')^2 - 4}}{2}.$$

Pentru ca să avem $x = y$, trebuie satisfăcute respectiv condițiile

(5) $a = \pm 2\sqrt{1+k}$, (6) $a = -k \pm 2$.

Dacă conditia (5) este satisfăcută, atunci

$$x = y = \pm\sqrt{1+k}.$$

Dacă condiția (6) este satisfăcută, atunci

$$x = y = \frac{-k' \pm 2}{2}.$$

Au soluționat bine problema, considerând numai cazul particular $k = k' = 0$, d-nii: *Bârlea Victor Suhățeanu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Constantinescu N. Virgil* (lic. Ploești), *Ciceiu Cetate* (Colegiul Carol, Craiova), *Dăscălescu Șt. Hristache* (Focșani), *Deheleanu Gheorghe, Diaconescu D Ioan* (lic. Arad), *Dragomir Adrian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Jidanu I. C.* (Șc. Polit., Timișoara), *Luca I. Ioan* (lic. Arad), *Mihăileanu C. Andrei* (lic Arad), *Mihoc N Ovidiu, Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Rădulescu R. Alexandru* (lic. Ploești), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Selmeneanu L. Horia* (lic. Orăștie), *Serban I. C-tin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Simon Petru* (lic. Arad), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Stalcu I. N.* (lic. Milit., N Filipescu), *Stamate I. Ionel* (student, Cluj), *Stefănescu F. Marin* Sub-Lt., Alba-Iulia), *Tătaru Alexandru* (lic. Orăștie), *Tilică C. Ștefan* (Șc. pregătitoare de Ofițeri), *Văduva F. Marin* (lic. Giurgiu) și *Venter D-tru*.

Problema 1712. — *Un număr de trei cifre fiind scris în sistemele de numerație cu bazele* $(B-1)$, B *și* $(B+1)$ *reproduc patratele perfecte a trei numere consecutive. Care sunt cifrele acelui număr.*

CPT. CD I. LINTES

Soluție. Fie $a\,b\,c$ numărul căutat, ale cărui cifre, conform enunțului, trebuie să satisfacă sistemul:

$$(1)\quad \begin{cases} (B-1)^2 a + (B-1) b + c = (N-1)^2 \\ B^2 a + B b + c = N^2 \\ (B+1) a + (B+1) b + c = (N+1)^2. \end{cases}$$

Scăzând prima ecuație din a 2^a și a 2^a din a 3^a, obținem:

$$(2)\quad \begin{cases} 2aB - a + b = 2N - 1 \\ 2aB + a + b = 2N + 1. \end{cases}$$

Prin scădere deducem

$$\boxed{a = 1}.$$

Inlocuind această valoare în a 2^a ecuație din (2), găsim:

$$\boxed{b = 2(N - B)}.$$

Inlocuind apoi valorile găsite pentru a și b în a 2^a ecuație din (1), aflăm:

$$\boxed{c = N^2 - B^2 - 2B(N - B) = (N - B)^2}.$$

Cum b și c sunt numere de o singură cifră, pozitive, putem lua numai

$$N - B = 0, 1, 2, 3,$$

și în aceste cazuri găsim că $a\,b\,c$ este oricare din numerile

$$100,\ 121,\ 144,\ 169.$$

Soluții date de d-nii: *Modâlcă S Emil* (lic. T-Severin), *Segal Zigu* (lic. Vaslui) și *Tilică C. Ștefan* (Șc Preg. de Ofițeri).

Problema 1727. — *Să se rezolve ecuația:*

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} 2x + \operatorname{arc\,tg} 3x = 0.$$

Î.-TRU MATEI

Soluție. Putem scri:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} 2x = -\operatorname{arc\,tg} 3x.$$

Luând tangenta în ambii membrii avem

$$\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) + \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 2x)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)\operatorname{tg}\operatorname{arc\,tg} 2x)} = -\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 3x),$$

sau

$$\frac{x + 2x}{1 - 2x^2} = -3x.$$

De aci deducem

$$6x^3 - 6x = 0,$$

deci

$$x = -1,\quad x = 0,\quad x = 1.$$

Singura soluție care verifică ecuația este $x = 0$.

Soluții date de d-ra *E. Manolache* (lic. „Principesa Ileană", Cluj) și de d-nii: *Bârlea V. Suhățeanu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Matei M. Chintescu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Doscan Gh. Alexandru* (lic. Giurgiu), *Dragomir Ermin Adrian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Enescu D. D-tru* (lic. Milit., Chișinău), *Herman I Carol* (Blaj), *Jidanu I. C-tin*

(Şc Polit., Timişoara), *Mihoc N. Ovidiu, Modâlcă S Emil* (lic. T-Severin), *Nicola Ovidiu, Spătaru Alexandru* (lic. Cluj), *Stamate I. Ionel* (student, Cluj), *Tica P. Marin-Gall* (Locot), *Tilică C. Ştefan* (Şc. Milit. de Geniu), *Todoran G. Gheorghe* (lic. Beiuş) şi *Vijelie Gh. Eugen* (lic. Milit., N. Filipescu).

PROBLEME PROPUSE

1833. — Să se determine cifrele a, b, c, d astfel ca numerile de opt cifre

$$26\,a\,b\,c\,d\,24 \quad \text{şi} \quad a\,b\,c\,d\,5216$$

să fie patrate perfecte.

V THÉBAULT

1834. — Ştiind că o literă din alfabet se înlocueşte prin valoarea funcţiunii

$$y = -2x + 49,$$

unde x reprezintă numărul de ordine al literei în alfabet, să se descifreze textul:

$$\overline{13}\,.\,\overline{23}\,.\,\overline{9}\,.\quad 47.13.39.\quad 41.19.7.47$$
$$--3.39.43.31.\quad 41.39.\quad 47.21.31.$$

Barele indică litere mari, iar punctele separă literile.

C-TIN I. JIDANU

1835. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} -p^3 & q^3 & r^3 \\ (x+p)^3 & (x-q)^3 & (x-r)^3 \\ (x+2p)^3 & (x-2q)^3 & (x-2r)^3 \end{vmatrix} = 0.$$

CORNELIU POPESCU

1836. — Să se rezolve inegalitarea

$$a + \sqrt{2(1+a)x + a^2(x-1)^2} < (1+a)x,$$

pentru $0 < a < 1$. Aplicaţie: $a = \frac{1}{2}$.

G-L GH. BUICLIU

1837. — Să se arate că:

$$\lim_{x=0} \frac{2p^2 \sin^2 x \sin(2p+1)x + 2p \sin x \cos 2px - \sin 2px \cos x}{4 \sin^3 x} = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

MARIA NEUMANN

1838. — Se notează cu A' piciorul înălţimii triunghiului ABC pe cercul circumscris triunghiului şi cu $A'A''$ simetrica dreptei AA' faţă de bisectoarea unghiului $BA'C$. Dreapta $A'A''$ taie latura BC în α. Se obţin analog dreptele $B'B''$, $C'C''$ şi punctele β, γ. Să se arate că dreptele $A'A''$, $B'B''$ şi $C'C''$ sunt concurente. Acelaş lucru pentru dreptele $A\alpha$, $B\beta$ şi $C\gamma$.

VASILE VASU

1839. — Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu oarecare, avem:

$$\frac{r_a - r_b}{1 + r_a r_b} + \frac{r_b - r_c}{1 + r_b r_c} + \frac{r_c - r_a}{1 + r_c r_a} = \frac{p^2 (a-b)(b-c)(c-a)}{s\left(1 + s \operatorname{cotg} \frac{A}{2}\right)\left(1 + s \operatorname{cotg} \frac{B}{2}\right)\left(1 + s \operatorname{cotg} \frac{C}{2}\right)}.$$

CEZAR IVANESCU

1940. — Să se arate că în orice triunghiu există relaţia:

$$\sum \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\sum a b (p-b) \sin \frac{C}{2}}{4R\sqrt{r r_a r_b r_c}}.$$

OSCAR SORIAN

1841. — Se cere configuraţia reprezentată parametric prin ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = (x + y - 2)\, sp\, \theta \\ y = (x + y - 2)\, cp\, \theta. \end{cases}$$

Să se determine grafic unghiul θ pentru un punct dat al configuraţiei şi invers.

V. ALACI

Manuscrise primite de la corespondenții noștrii până la 10 a lunei curente și anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) și probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Aman V. C-tin (P.); *Aldea V. Virgil* (1818); *Andronachi Vladamir* (N.); *Bakonyi C.* (1782, 1822); *Bârlea-Suhăteanu G. Victor* (1697, 1702, 1799, 1817, 1819); *Brădeanu Nicolae* (1817, 1818); *Buznea D. Dinu* (P.); *Doscan Gh. Alexandru* (1682, 1693); *Dragomir M. Ermin Adrian* (1702); *Facsko I. Gheorghe* (1827); *Herlea V. Valeriu* (1815); *Jidanu C-tin* (N., P., 1220, 1485), *Logofătu M. Ion* (1817, 1818); *Negrea Mircea* (1785, 1791, 1794, 1815, 1818, 1823); *Papadopol-Demetra Elena* (1815, 1823, 1827); *Radoslav G. Ion* (1829); *Șenchi M. Eugen* (1786); *Șerban C. C-tin* (1667, 1668, 1669, 1694, 1697, 1698, 1710, 1728, 1730, 1736); *Stamate I. Ionel* (1485, 1764); *Ștefanovici I. Mircea* (1786); *Tica P. Marin-Gall* (P., 1817, 1818); *Țarălungă Gh. Savel* (P., 1812, 1817); *Venter D-tru* (1669, 1705, 1709, 1725, 1728, 1734, 1741, 1757, 1778, 1784, 1817, 1818).

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait a Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 286 articles, 249 notes et 1892 problèmes proposés.

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIII, s'a primit la Redacția „R. M. T." până acum, următorul abonament:

1. *Prof. Ion Rizescu.* Str. Mihăileanu 18, Constanța.
2. *Prof. Constantin Borș.* Str. Petru Rareș 85, Piatra Neamț.
3. D-l *Marin I. Popa,* Licențiat în Matematici. Bulevardul Alexandru I. Cuza 20, București II.

Legându-se colecția R. M. T., anul XIX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

A apărut volumul:

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ

de

VALERIU ALACI

Profesor, Școala Politechnică, Timișoara.

272 pagini — Prețul: 180 Lei.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte și să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XIX, cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenții, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

ANUL XX. MAI 1940 No. 3.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **O. N. TINO:** TRIUNGHIURI ISOCLINE CIRCUMSCRISE UNUI TRIUNGHIU DAT,
2. NOTE MATEMATICE: 6, 7.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 369, 1713, 1720, 1729, 1734. 1735.
5. PROBLEME PROPUSE: 1842-1849.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XX, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIX inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XX — No. 3 TIMISOARA, MAI 1940

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

TRIUNGHIURI ISOCLINE CIRCUMSCRISE UNUI TRIUNGHIU DAT.

DE O. N. ȚINO

In legătură și ca urmare a articolului nostru publicat în N-rile 2, 3, An. V al revistei *Pitagora*, vom da aci câteva *proprietăți ale triunghiurilor circumscrise unui triunghiu dat cu laturile isocline față de laturile opuse ale triunghiului dat.* Vom înțelege, în general, prin triunghiu circumscris unui triunghiu dat, triunghiul ale cărui laturi trec prin vârfurile triunghiului dat. Pentru cazul când laturile triunghiului circumscris sunt isocline față de laturi adiacente ale triunghiului dat, cum am mai arătat în *Observarea VII-a* a articolului nostru mai sus citat, proprietățile au fost studiate de *Brocard, J. Neuberg*, etc; așa fiind studiul de față va fi limitat numai la cazul *triunghiurilor circumscrise unui triunghiu dat și având laturile isocline de unghiul dat α față cu laturile opuse corespunzătoare ale triunghiului dat.*

1. Fie un triunghiu dat A B C și un unghiu dat $\alpha \leqq \frac{\pi}{2}$. Pentru o mai ușoară urmărire dăm cazurile de figură în care presupunem unghiul α, fie mai mare de cât cel mai mare unghiu al triunghiului fundamental A B C, fie mai mic de cât cel mai mic unghiu al triunghiului A B C. Proprietățile semnalate sunt de altminteri independente de cazul de figură considerat).

Ducem prin punctele B și C, de aceeași parte cu triunghiul A B C, două semidrepte Δ'_a și Δ''_a anticline față de latura B C de unghiul α, adică astfel ca $(\widehat{BC, \Delta'_a}) = \alpha$ și $(\widehat{CB, \Delta''_a}) = \alpha$, iar prin vârful A ducem paralelele A A_1 și A A_2 respectiv la Δ'_a și Δ''_a, limitate la latura B C. In același fel, construim prin C și A anticlinele Δ'_b, Δ''_b de unghiul α și paralelele B B_1, B B_2 la Δ'_b, Δ''_b limitate la C A; apoi prin A și B anticlinele Δ'_c, Δ''_c de unghiul α și din C paralelele C C_1, C C_2 la Δ'_c, Δ''_c limitate la A B.

Cevienele A A_1, B B_1, C C_1 sunt drepte isocline, de unghiul α, față cu laturile opuse corespunzătoare, când *sensul* pe conturul triunghiului fundamental este A B C; asemenea A A_2, B B_2, C C_2 sunt drepte isocline, de unghiul α, față cu laturile opuse corespunzătoare, când sensul pe contur este A C B, contrar celui dintâi. Se poate vedea ușor, că *aceste două triple de ceviene* (A A_1, B B_1, C C_1) *și* (A A_2, B B_2, C C_2) *sunt singurele soluții corespunzătoare unghiului dat α.*

In adevăr, descriind pe laturile A B, B C, C A segmente de cerc capabile de unghiul dat α, către interiorul triunghiului, obținem pe fiecare latură două puncte, deci în total avem numai șase ceviene care fac cu laturile opuse corespunzătoare ale triunghiului dat unghiul α, trei corespunzând unui sens,

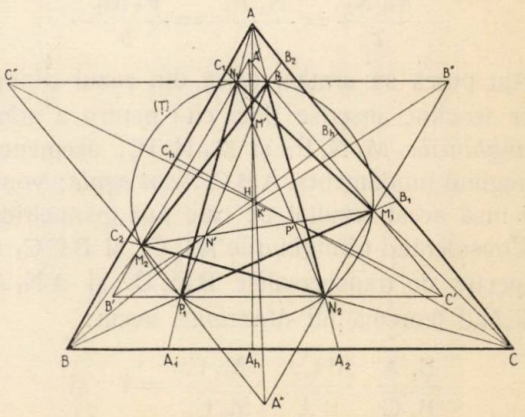


Fig 1.

celelalte trei celuilalt sens pe conturul triunghiului. *Cele două triple de ceviene determină două triunghiuri asemenea cu triunghiul dat, circumscrise lui*

şi cu laturile isocline faţă de laturile opuse ale triunghiului dat, proprietate care rezultă imediat din proprietatea cunoscută, că *orice triunghiu determinat de trei ceviene isocline de acelaşi sens faţă de laturile opuse ale triunghiului fundamental, este asemenea cu triunghiul dat.*

Fie M_1, N_1, P_1 intersecţiile perechilor de drepte $(B B_1, C C_1)$; $(C C_1, A A_1)$; $(A A_1, B B_1)$; asemenea M_2, N_2, P_2 intersecţiile perechilor de drepte $(B B_2, C C_2)$; $(C C_2, A A_2)$; $(A A_2, B B_2)$. Să arătăm că, triunghiurile isocline $M_1 N_1 P_1$ şi $M_2 N_2 P_2$ circumscrise triunghiului A B C, pentru unghiul α, se bucură de proprietăţile analoage cu acele ale triunghiurilor isocline înscrise în triunghiul fundamental şi corespunzând unui unghiu dat.

2. In primul rând, având $\sphericalangle A A_1 C = \sphericalangle B B_1 A = \sphericalangle C C_1 B = \alpha$, din triunghiurile $A A_1 B$, $B B_1 C$, $C C_1 A$, avem:

$$(1)\quad \sphericalangle A C C_1 = \alpha - A; \quad \sphericalangle B A A_1 = \alpha - B; \quad \sphericalangle C B B_1 = \alpha - C;$$

apoi din triunghiurile $M_1 B_1 C$, $N_1 C_1 A$, $P_1 A_1 B$, deducem că:

$$(2)\quad \sphericalangle P_1 M_1 N_1 = \sphericalangle B_1 M_1 C = \alpha - (\alpha - A) = A; \quad \sphericalangle M_1 N_1 P_1 = B; \quad \sphericalangle N_1 P_1 M_1 = C,$$

adică triunghiul $M_1 N_1 P_1$ este asemenea cu A B C, deci:

$$\frac{\overline{M_1 N_1}}{\overline{A B}} = \frac{\overline{N_1 P_1}}{\overline{B C}} = \frac{\overline{P_1 M_1}}{\overline{C A}}, \text{ sau}$$

$$(3)\quad \frac{\overline{M_1 N_1}}{c} = \frac{\overline{N_1 P_1}}{a} = \frac{\overline{P_1 M_1}}{b}.$$

Am putea să urmăm calea din cazul triunghiurilor isocline înscrise (loc. cit.) pentru a arăta *că triunghiurile* $M_1 N_1 P_1$ şi $M_2 N_2 P_2$, asemenea cu triunghiul fundamental A B C, *sunt egale*; vom stabili însă acest rezultat pe cale pur geometrică.

Considerând triunghiurile $A C C_2$ şi $B C C_1$ tăiate respectiv de transversalele $B M_2 B_2$ şi $A N_1 A_1$ şi aplicând teorema lui *Menelaus,* avem:

$$\frac{\overline{B_2 A}}{\overline{B_2 C}} \cdot \frac{\overline{B C_2}}{\overline{B A}} \cdot \frac{\overline{M_2 C}}{\overline{M_2 C_2}} = 1 \quad \text{şi}$$

$$(4)\quad \frac{\overline{A_1 B}}{\overline{A_1 C}} \cdot \frac{\overline{A C_1}}{\overline{A B}} \cdot \frac{\overline{N_1 C}}{\overline{N_1 C_1}} = 1,$$

dar, perechile de triunghiuri asemenea $(B B_2 A, C C_1 A)$; $(A A_1 B, C C_2 B)$; $(B B_2 C, A A_1 C)$, dau respectiv:

$$(5)\quad \frac{\overline{A B_2}}{\overline{A C_1}} = \frac{\overline{A B}}{\overline{A C}}; \quad \frac{\overline{B A_1}}{\overline{B C_2}} = \frac{\overline{B A}}{\overline{B C}}; \quad \frac{\overline{C B_2}}{\overline{C A_1}} = \frac{\overline{C B}}{\overline{C A}}$$

şi ca urmare avem:

$$\frac{\overline{M_2 C}}{\overline{M_2 C_2}} : \frac{\overline{N_1 C}}{\overline{N_1 C_1}} = \frac{\overline{A C_1}}{\overline{A B_2}} \cdot \frac{\overline{B A_1}}{\overline{B C_2}} \cdot \frac{\overline{C B_2}}{\overline{C A_1}} =$$

$$\frac{\overline{A C}}{\overline{A B}} \cdot \frac{\overline{A B}}{\overline{B C}} \cdot \frac{\overline{B C}}{\overline{A C}} = +1;$$

sau încă:

$$(6)\quad \frac{\overline{M_2 C}}{\overline{M_2 C_2}} = \frac{\overline{N_1 C}}{\overline{N_1 C_1}},$$

deci *dreapta* $M_2 N_1$ *este paralelă la* A B, şi cum triunghiul $C_1 C C_2$ este isoscel $(\sphericalangle B C_1 C = \sphericalangle A C_2 C = \alpha)$, *triunghiul* $N_1 C M_2$ *este deasemenea isoscel,* adică

$$(7)\quad \overline{C N_1} = \overline{C M_2}$$

In acelaşi fel, arătăm că $N_2 P_1$ şi $P_2 M_1$ *sunt respectiv paralele la laturile* B C *şi* C A, şi, ca urmare, avem:

$$(7')\quad \overline{B M_1} = \overline{B P_2}, \quad \overline{A P_1} = \overline{A N_2}.$$

Insemnând cu A', B', C' intersecţiile perechilor de drepte $(M_1 P_2, M_2 N_1)$; $(N_1 M_2, N_2 P_1)$; $(P_1 N_2, P_2 M_1)$, observăm că *triunghiurile isocline* $M_1 N_1 P_1$ *şi* $M_2 N_2 P_2$ *circumscrise triunghiului fundamental* A B C *pentru unghiul dat* α, *sunt în acelaşi timp triunghiuri isocline înscrise triunghiului* A' B' C' *(pentru unghiul* $\pi - \alpha$ *sau pentru unghiul* α*).*

Urmează din această observare, că triunghiurilor $M_1 N_1 P_1$ şi $M_2 N_2 P_2$ li se aplică toate proprietăţile studiate în articolul nostru amintit la începutul celui de faţă. Vom restabili aceste proprietăţi pe cale directă pur geometrică, datorită cazului particular al provenienţei acestor triunghiuri.

Mai înainte de aceasta, observăm că triunghiurile $M_1 N_1 P_1$ şi $M_2 N_2 P_2$ pot fi încă considerate ca fiind înscrise într'un al doilea triunghiu. Considerăm triunghiurile $A C C_1$ şi $B C C_2$ tăiate respectiv de transversalele $B M_1 B_1$ şi $A N_2 A_2$ şi aplicăm teorema lui *Menelaus.* Avem următoarele două relaţii:

$$\frac{\overline{B_1A}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{M_1C}}{\overline{M_1C_1}} = 1$$

şi

$$\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} \cdot \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{N_2C}}{\overline{N_2C_2}} = 1$$

din care deducem:

$$(8)\quad \frac{\overline{M_1C}}{\overline{M_1C_1}} : \frac{\overline{N_2C}}{\overline{N_2C_2}} = \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} \cdot \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB}}$$

$$= \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{BA_2}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{CA_2}},$$

dar, perechile de triunghiuri asemenea (BB_1A, CC_2A); (AA_2B, CC_1B); (BB_1C, AA_2C) dau relaţiile:

$$(9)\quad \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}; \frac{\overline{BA_2}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}; \frac{\overline{CB_1}}{\overline{CA_2}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$$

de care ţinând seamă în relaţia (8), avem:

$$\frac{\overline{M_1C}}{\overline{M_1C_1}} = \frac{\overline{N_2C}}{\overline{N_2C_2}},$$

adică M_1N_2 este paralelă la AB şi ca urmare:

$$(10)\qquad \overline{CM_1} = \overline{CN_2}.$$

In acelaşi fel, arătăm că dreptele P_1M_2 şi N_1P_2 sunt respectiv paralele cu CA şi BC, deci că

$$(10')\qquad \overline{BM_2} = \overline{BP_1} \quad \text{şi} \quad \overline{AN_1} = \overline{AP_2}.$$

Fie A'', B'', C'' intersecţiile perechilor de drepte (M_1N_2, M_2P_1); (N_1P_2, N_2M_1); (P_1M_2, P_2N_1). *Triunghiul* $A''B''C''$ *este omotetic cu triunghiul dat* ABC, *iar triunghiurile* $M_1N_1P_1$ *şi* $M_2N_2P_2$ *sunt triunghiuri isocline înscrise corespunzând unghiului dat* α.

[Pentru cazul de figură $\alpha < A; B; C$, triunghiurile $M_1N_1P_1$ şi $M_2N_2P_2$ sunt exînscrise triunghiului $A''B''C''$ pentru unghiul α].

3. *Cele două triunghiuri* $M_1N_1P_1$ şi $M_2N_2P_2$, *soluţii ale problemii, sunt triunghiuri egale.*

In adevăr, avem:

$$(11)\quad \overline{M_1N_1} = \overline{CN_1} - \overline{CM_1} = \overline{CM_2} - \overline{CN_2} = \overline{N_2M_2}.$$

In acelaşi fel, avem:

$$(11')\qquad \overline{N_1P_1} = \overline{N_2P_2} \quad \text{şi} \quad \overline{P_1M_1} = \overline{P_2M_2}.$$

[In cazul când $\alpha < A; B; C$, relaţia (11) devine: $\overline{M_1N_1} = \overline{CN_1} + \overline{M_1C} = \overline{M_2C} + \overline{CN_2} = \overline{M_2N_2}$, în care se transformă dealtfel (11), ţinând seamă de *sens*].

4. *Cele două triunghiuri* $M_1N_1P_1$ *şi* $M_2N_2P_2$, *soluţii ale problemei, au acelaşi cerc circumscris.*

Observăm în primul rând că:

$$\sphericalangle M_1P_2N_2 = \alpha - C \text{ şi } \sphericalangle M_1P_1N_2 = \alpha - C,$$

deci cercul $N_2M_1P_1$ trece şi prin P_2.

Dealtă parte, observând că:

$$\sphericalangle P_2N_1M_1 = \sphericalangle N_1CB = \sphericalangle C_1CB = \pi - \alpha - B,$$

iar $\sphericalangle M_1N_1P_1 = B$, urmează că:

$$\sphericalangle P_2N_1P_1 = \sphericalangle P_2N_1M_1 + \sphericalangle M_1N_1P_1 = \pi - \alpha = \pi - \sphericalangle P_2N_2P_1,$$

deci că cercul $P_2M_1N_2P_1$ trece şi prin N_1.

In acelaşi fel, având:

$$\sphericalangle P_1M_2N_2 = \sphericalangle M_2CA = \sphericalangle C_2CA = (\pi - \alpha) - A$$

şi $\sphericalangle N_2M_2P_2 = A$ rezultă că

$$\sphericalangle P_2M_2N_2 = \pi - \alpha = \pi - \sphericalangle P_1M_1P_2,$$

deci că acel cerc $N_1P_2M_1N_2P_1$ mai trece şi prin M_2.

Cercul $N_1M_1P_1$ *circumscris celor două triunghiuri, soluţii ale problemii, este cercul* (T) *al celor şase puncte al triunghiului* $A'B'C'$; *el este deasemenea cercul* (T) *al celor şase puncte al triunghiului* $A''B''C''$.

5. Dacă însemnăm acum cu R şi R_1 razele cercurilor ABC şi $M_1N_1P_1$, ştim că: $\frac{R_1}{R} = \frac{\overline{M_1N_1}}{\overline{AB}}$ egal cu raportul de asamănare al celor două triunghiuri ABC şi $M_1N_1P_1$.

Din triunghiurile CN_1A şi CM_1B, avem însă:

$$\overline{CN_1} = \frac{\overline{AC}\sin(\alpha + C)}{\sin B} = \frac{b}{\sin B}\sin(\alpha + C) = \frac{c}{\sin C}\sin(\alpha + C)$$

$$\overline{CM_1} = \frac{\overline{BC}\sin(\alpha - C)}{\sin A} = \frac{a}{\sin A}\sin(\alpha - C) = \frac{c}{\sin C}\sin(\alpha - C),$$

din care deducem:

$$\overline{M_1N_1} = \frac{c}{\sin C}[\sin(\alpha + C) - \sin(\alpha - C)] = 2c\cos\alpha,$$

sau încă:

$$(12)\qquad \frac{\overline{M_1N_1}}{c} = 2\cos\alpha; \quad \text{deci} \quad \boxed{\frac{R_1}{R} = 2\cos\alpha}.$$

[In cazul $\alpha < A; B; C$, avem

$$\overline{CN_1} = \frac{c}{\sin C}\sin(C - \alpha),$$

iar

$$\overline{CM_1} = \frac{c}{\sin C}\sin(C + \alpha),$$

dar rezultatul final se păstrează].

Observare. Insemnând cu S şi S_1 ariile triunghiului dat A B C şi triunghiului isoclin circumscris $M_1N_1P_1$, avem după teorema raportului ariilor a două triunghiuri asemenea, că

$$(13)\qquad \boxed{S_1 = 4S\cos^3\alpha}.$$

Din relaţia (13) deducem, observând că aria S a triunghiului dat este diferită de *zero,* că S_1 este nul numai în cazul limită $\alpha = \frac{\pi}{2}$, adică *singurele ceviene, isocline faţă de laturile opuse şi concurente în acelaşi punct, sunt înălţimile triunghiului dat.*

In acest caz, deci, *cele două triple de ceviene isocline faţă de laturile opuse* (de un sens şi de sens contrar) *sunt confundate cu înălţimile triunghiului dat.*

[In cazul al doilea de figură, $\alpha < A; B; C$, avem $\alpha < \frac{\pi}{2}$, deci în acest caz triunghiurile soluţii ale problemii, nu se pot reduce la un punct.]

6. Dreptele M_1M_2, N_1N_2, P_1P_2 care unesc vârfurile omoloage ale celor două triunghiuri soluţii, $M_1N_1P_1$ şi $M_2N_2P_2$ (asemenea cu triunghiul A B C) sunt antiparalele respectiv la $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ în unghiurile $B'A'C'$, $C'B'A'$, $A'C'B'$, deci ele sunt antiparalele respectiv la B C, C A, A B în unghiurile B A C, C B A, A C B ale triunghiului dat.

(In adevăr $\sphericalangle M_1P_1N_1 = \sphericalangle M_1P_1N_1 = C$, etc.) Dealtăparte, mediatoarea segmentului P_1N_2 este deasemenea mediatoarea segmentelor N_1P_2, A_1A_2, fiind înălţimea AA_h a triunghiului A B C, iar $\overline{N_1N_2}$ şi $\overline{P_1P_2}$ fiind segmente simetrice în raport cu AA_h se întâlnesc în M' pe ea şi sunt egale: $\overline{N_1N_2} = \overline{P_1P_2}$. Asemenea $M_1\overline{M_2}$ şi $\overline{N_1N_2}$ fiind simetrice faţă de înălţimea CC_h (mediatoarea comună a segmentelor

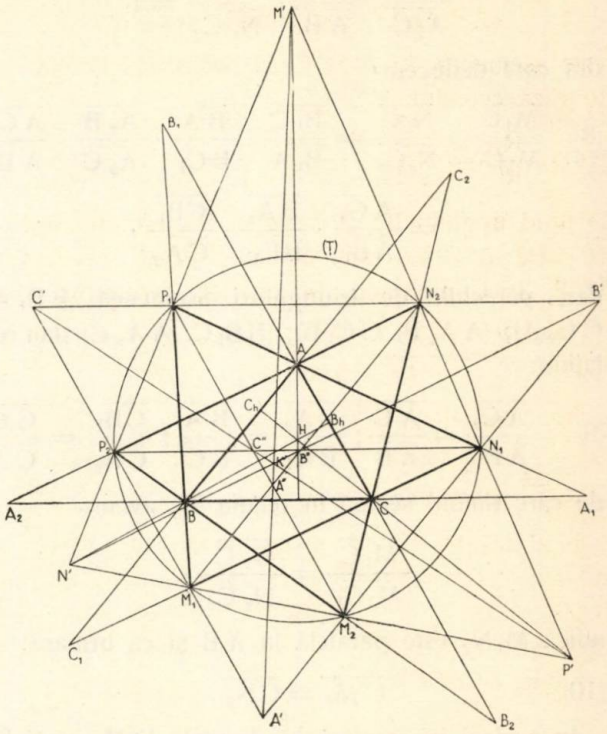


Fig. 2.

C_1C_2, N_1M_2, M_1N_2) se întâlnesc pe ea în punctul P' şi sunt egale: $\overline{M_1M_2} = \overline{N_1N_2}$, iar $\overline{M_1M_2}$ şi $\overline{P_1P_2}$ se întâlnesc în N' pe înălţimea BB_h (mediatoarea comună segmentelor $\overline{B_1B_2}$, $\overline{M_1P_2}$, $\overline{P_1M_2}$) şi sunt egale. Rezumând deci, avem proprietăţile:

a. $\overline{M_1M_2}$, $\overline{N_1N_2}$, $\overline{P_1P_2}$ *sunt antiparalele egale la laturile triunghiului* A' B' C' *şi determină un triunghiu* M' N' P' *cu vârfurile pe cele trei înălţimi ale triunghiului fundamental* A B C.

b. Cercul (T) *al celor şase puncte* M_1, N_1, P_1; M_2, N_2, P_2 *este un cerc Tucker, centrul lui fiind ortocentrul* H *al triunghiului fundamental* A B C.

Observând încă că triunghiurile $N_1M'P_2$, $P_1N'M_2$, $M_1P'N_2$ sunt isoscele, rezultă că înălţimile AM', BN', CP' ale triunghiului A B C sunt bisectoarele interioare ale triunghiului M' N' P', deci *centrul cercului* (T) *al celor şase puncte relativ la triunghiul* A' B' C', *este în acelaşi timp centrul cercului*

înscris în triunghiul M′ N′ P′. [Proprietate ce rezultă şi din *a.* şi *b.*]

7. Triunghiul isoclin $M_1N_1P_1$ înscris în triunghiul A′ B′ C′, astfel ca

$$\sphericalangle P_1M_1C' - \sphericalangle P_1B_1C = \pi - \alpha,$$

este asemenea cu A′ B′ C′ şi avem, însemnând cu R′ raza cercului A′ B′ C′,

$$(14)\quad \frac{R_1}{R'} = \frac{\sin\omega}{\sin[\pi-\alpha+\omega]} = \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\omega)},$$

ω fiind unghiul lui *Brocard* al triunghiului A B C, cu care A′ B′ C′ este omotetic (Vezi *„Pitagora“*, V, 2, 3). Comparând (14) cu (12), deducem:

$$(15)\quad \frac{R'}{R} = \frac{R_1}{R} : \frac{R_1}{R'} = \frac{2\cos\alpha\sin(\alpha-\omega)}{\sin\omega}.$$

[In cazul $\alpha < A; B; C$, avem:

$$\frac{R_1}{R'} = \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha+\omega)}, \text{ deci } \frac{R'}{R} = \frac{2\cos\alpha\sin(\alpha+\omega)}{\sin\omega}].$$

In acelaşi fel, triunghiul isoclin înscris triunghiului A″ B″ C″, corespunzător unghiului $N_1M_1B'' = \alpha$ ($\sphericalangle N_1M_1B'' = \sphericalangle C_1M_1B'' = \sphericalangle M_1C_1B = \alpha$) este asemenea cu A″ B″ C″ şi însemnând cu R″ raza cercului A″ B″ C″, avem:

$$(16)\quad \frac{R''}{R_1} = \frac{\sin(\alpha+\omega)}{\sin\omega}.$$

Comparând (16) cu (12), obţinem:

$$(17)\quad \frac{R''}{R} = \frac{2\cos\alpha\sin(\alpha+\omega)}{\sin\omega}.$$

In fine, din (15) şi (17) (sau din (14) şi (16)) rezultă:

$$(18)\quad \frac{R'}{R''} = \frac{\sin(\alpha-\omega)}{\sin(\alpha+\omega)}$$

şi se vede că *triunghiurile omotetice* A′ B′ C′ şi A″ B″ C″ *sunt egale numai în cazul singular* $\alpha = \frac{\pi}{2}$, *când ambele se reduc la ortocentrul triunghiului* A B C.

Observare. Patrulaterul $B'N_2B''N_1$ este paralelogram; dreapta B′ B″ trece prin mijlocul antiparalelei $\overline{N_1N_2}$ la latura A′ C′ în triunghiul A′ B′ C′, deci B′ B″ este *simediană* în triunghiul A′ B′ C′. Asemenea având $\sphericalangle B'N_1N_2 = \sphericalangle B'C'A' = \sphericalangle B''C''A''$ şi $\sphericalangle B'N_1N_2 = \sphericalangle N_1N_2B''$, deducem că $\sphericalangle N_1N_2B'' = \sphericalangle B''C''A''$, adică că $\overline{N_1N_2}$ este antiparalelă la A″ C″, deci că B′ B″ este *simediană* şi în triunghiul A″ B″ C″. Ca urmare, *centrul de omoteţie* al triunghiurilor A′ B′ C′ şi A″ B″ C″ este punctul K′, al lui *Lemoine*, relativ la triunghiul A′ B′ C′ şi asemenea punctul lui *Lemoine* pentru triunghiul A″ B″ C″.

Punctul O′ fiind centrul cercului A′ B′ C′, centrul cercului (Ţ) al celor şase puncte în cele două triunghiuri aparţinând dreptei O′ K′ *(Tucker)* şi confundându-se cu ortocentrul H al triunghiului fundamental A B C, rezultă că *dreapta* O′ K′ *trece prin ortocentrul* H. Asemenea O″ fiind centrul cercului A″ B″ C″, dreapta O″ K′ trece asemenea prin H. Aşa dar, *cele patru puncte* O′, K′, O″, H, *sunt pe aceeaşi dreaptă.*

8. Observând acum, că $\sphericalangle N_1HM_2 = 2\sphericalangle N_1P_2M_2 = 2\sphericalangle B_2BC = 2[\pi-(\alpha+C)]$ şi $\sphericalangle P_1HN_2 = 2[\pi-(\alpha+A)]$; $\sphericalangle M_1HP_2 = 2[\pi-(\alpha+B)]$, deducem relaţiile:

$$(19)\quad \frac{\overline{M_2N_1}}{\sin(\alpha+C)} = \frac{\overline{P_2M_1}}{\sin(\alpha+B)} = \frac{\overline{N_2P_1}}{\sin(\alpha+A)} = 2R_1.$$

Tot astfel, având $\sphericalangle N_1HP_2 = 2\sphericalangle N_1M_2P_2 = 2\sphericalangle AB_2B = 2(\alpha-A)$; $\sphericalangle P_1HM_2 = 2(\alpha-B)$; $\sphericalangle M_1HN_2 = 2(\alpha-C)$, deducem relaţiile:

$$(20)\quad \frac{\overline{M_1N_2}}{\sin(\alpha-C)} = \frac{\overline{P_1M_2}}{\sin(\alpha-B)} = \frac{\overline{N_1P_2}}{\sin(\alpha-A)} = 2R_1.$$

Ocupându-ne de segmentele determinate de cevienele isocline pe laturile corespunzătoare ale triunghiului fundamental A B C, observăm că avem:

$$\overline{C_1C_2} = 2\overline{CC_1}\cos\alpha, \quad \text{dar } \overline{CC_1} = \frac{b\sin A}{\sin\alpha},$$

deci:

$$\overline{C_1C_2} = 2b\sin A\operatorname{cotg}\alpha = 4R\sin A\sin B\operatorname{cotg}\alpha;$$

sau încă:

$$\frac{\overline{C_1C_2}}{\operatorname{cosec} C} = 4R\sin A\sin B\sin C\operatorname{cotg}\alpha.$$

Asemenea găsim că:

$$\frac{\overline{B_1B_2}}{\operatorname{cosec} B} = 4R\sin A\sin B\sin C\operatorname{cotg}\alpha$$

şi

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\operatorname{cosec} A} = 4R\sin A\sin B\sin C\operatorname{cotg}\alpha,$$

de unde rezultă prin comparare:

$$(21)\qquad \frac{\overline{A_1A_2}}{\operatorname{cosec} A}=\frac{\overline{B_1B_2}}{\operatorname{cosec} B}=\frac{\overline{C_1C_2}}{\operatorname{cosec} C},$$

adică, *segmentele determinate pe laturile triunghiului fundamental de laturile a două triunghiuri isocline circumscrise, față cu laturile opuse și corespunzând aceluiași unghiu, sunt totdeauna direct proporționale cu cosecantele unghiurilor opuse ale triunghiului fundamental.*

9. *Capetele celor trei segmente* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *se găsesc pe o conică.*

Observăm în primul rând, că, dacă considerăm perechile de cercuri: (BC_1B_2C, BC_2B_1C); (CA_1C_2A, CA_2C_1A); (AB_1A_2B, AB_2A_1B) avem respectiv perechile de relații:

$$(22)\quad \begin{aligned}&\overline{AC_1}\cdot\overline{AB}=\overline{AB_2}\cdot\overline{AC};\ \overline{AC_2}\cdot\overline{AB}=\overline{AB_1}\cdot\overline{AC}\\ &\overline{BA_1}\cdot\overline{BC}=\overline{BC_2}\cdot\overline{BA};\ \overline{BA_2}\cdot\overline{BC}=\overline{BC_1}\cdot\overline{BA}\\ &\overline{CB_1}\cdot\overline{CA}=\overline{CA_2}\cdot\overline{CB};\ \overline{CB_2}\cdot\overline{CA}=\overline{CA_1}\cdot\overline{CB}\end{aligned}$$

și înmulțind relațiile corespunzătoare aceleeași perechi, avem:

$$(23)\quad \frac{\overline{AC_1}\cdot\overline{AC_2}}{\overline{AB_1}\cdot\overline{AB_2}}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2};\quad \frac{\overline{BA_1}\cdot\overline{BA_2}}{\overline{BC_1}\cdot\overline{BC_2}}=\frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2};$$

$$\frac{\overline{CB_1}\cdot\overline{CB_2}}{\overline{CA_1}\cdot\overline{CA_2}}=\frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2}.$$

Se vede imediat că, o condiție necesară pentru ca extremitățile celor trei segmente A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 să fie pe un cerc, este ca *triunghiul fundamental să fie echilateral*; așa dar în cazul triunghiului fundamental neechilateral cele șase puncte A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 nu sunt pe același cerc.

Dacă înmulțim însă relațiile (23), parte cu parte, obținem

$$(24)\quad \frac{\overline{BA_1}\cdot\overline{BA_2}}{\overline{CA_1}\cdot\overline{CA_2}}=\frac{\overline{CB_1}\cdot\overline{CB_2}}{\overline{AB_1}\cdot\overline{AB_2}}\cdot\frac{\overline{AC_1}\cdot\overline{AC_2}}{\overline{BC_1}\cdot\overline{BC_2}}=+1,$$

relație care ne arată că dacă considerăm conica (I') a cinci puncte (de exemplu A_1, A_2, B_1, B_2, C_1) trece prin al șaselea punct (adică prin C_2). Este suficient pentru a demonstra acest lucru, să scriem relația lui *Carnot* (Géométrie de position) pentru conica (I') care întâlnește laturile triunghiului fundamental ABC și a unicității raportului determinat de un punct pe un segment dat.

Punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 fiind pe o conică, în virtutea *teoremii exagonului lui Pascal, dreptele* A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 *întâlnesc laturile opuse* AB, BC, CA *în trei puncte așezate pe aceeași dreaptă.*

Asemenea, *dreptele* A_1C_2, B_1A_2, C_1B_2 *întâlnesc laturile* AC, BA, CB *în trei puncte așezate pe aceeași dreaptă.*

10. Vârfurile triunghiului $M'N'P'$ fiind pe cele trei înălțimi AA_h, BB_h, CC_h ale triunghiului fundamental ABC, el este omologic cu triunghiul fundamental ABC, *centrul de omologie* fiind ortocentrul H al triunghiului ABC (care este centrul cercului *înscris în* $M'N'P'$); prin urmare *antiparalelele egale* M_1M_2, N_1N_2, P_1P_2 *prelungite, întâlnesc laturile respective* BC, CA, AB *în trei puncte așezate pe aceeași dreaptă.*

11. Exagonul $N_1N_2M_1P_2P_1M_2$, fiind exagon înscris în cercul (Γ) al celor șase puncte în triunghiul $A'B'C'$ (sau $A''B''C''$), laturile lui opuse sunt concurente în trei puncte așezate pe aceeași dreaptă (Teorema lui *Pascal*), deci *dreapta* $A'A''$ *trece prin* M'. Asemenea, considerând exagoanele $M_1M_2N_1P_2P_1N_2$ și $M_1M_2P_1N_2N_1P_2$ înscrise în cercul (Γ), deducem că *dreptele* $B'B''$ și $C'C''$ *trec respectiv prin punctele* N' și P'.

12. Am văzut că dreptele $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ sunt concurente în punctul K' (punctul lui *Lemoine* comun triunghiurilor $A'B'C'$ și $A''B''C''$), deci triunghiul $M'N'P'$ este încă omologic cu fiecare din triunghiurile $A'B'C'$ și $A''B''C''$. Așa dar, *antiparalelele egale* $\overline{M_1M_2}$, $\overline{N_1N_2}$, $\overline{P_1P_2}$ *prelungite, întâlnesc laturile* $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ *ale triunghiului* $A'B'C'$ *în trei puncte așezate în linie dreaptă.*

Asemenea, antiparalelele egale $\overline{M_1M_2}$, $\overline{N_1N_2}$, $\overline{P_1P_2}$ prelungite, întâlnesc laturile $B''C''$, $C''A''$, $A''B''$ în trei puncte așezate în linie dreaptă.

13. *Cercul* $M_2P'N_2$ *trece prin* H, căci având

$$\text{arc. } M_2P_1N_2=\text{arc. } M_1P_2N_1,$$

deducem

$$\sphericalangle M_2P'N_2=2\sphericalangle M_2P_2N_2=2C,$$

şi cum H este centrul cercului $M_2N_2P_2$, avem de asemenea,

$\sphericalangle M_2HN_2 = 2C$; deci $\sphericalangle M_2P'N_2 = \sphericalangle M_2HN_2$.

Asemenea, *cercurile* $N_2M'P_2$ *şi* $P_2N'M_2$ *trec prin* H.

Tot astfel demonstrăm că *cercurile* $P_1N'M_1$, $M_1P'N_1$, $N_1M'P_1$ *trec prin punctul* H.

14. Cercul $M_2A''N_2$, are segmentul $M_2A''N_2$ capabil de unghiul A (deoarece ce $A'' = A$); deci tangenta în punctul M_2 la acest cerc, făcând cu coarda M_2N_2 (în acelaşi sens cu M_2P_2) unghiul A, se aşterne peste M_2P_2; ca urmare, cercul $M_2A''N_2$ este *cercul adjunct al triunghiului* $M_2N_2P_2$, relativ la latura M_2N_2 şi tangent laturei M_2P_2.

Asemenea, cercul $N_2B''P_2$ este *cercul adjunct* triunghiului $M_2N_2P_2$ relativ la latura N_2P_2 şi tangent laturei N_2M_2; iar cercul $P_2C''M_2$ este cercul adjunct al aceluiaşi triunghiu, tangent laturei P_2N_2.

Aşa dar, cele trei cercuri $M_2A''N_2$, $N_2B''P_2$, $P_2C''M_2$ se întâlnesc în acelaşi punct Ω_2', *care este primul punct Brocard în triunghiul* $M_2N_2P_2$.

Asemenea, cercurile $M_1A''P_1$, $N_1B''M_1$, $P_1C''N_1$ sunt cercurile adjuncte ale triunghiului $M_1N_1P_1$ respectiv tangente laturilor M_1N_1, N_1P_1, P_1M_1, deci ele se întâlnesc în acelaşi punct Ω_1'', *care este al doilea punct Brocard în triunghiul* $M_1N_1P_1$.

[In cazul de figură $\alpha < A$; B; C, $\sphericalangle M_2AN_2 = \pi - A$, etc; $\sphericalangle M_1A''P_1 = \pi - A$, etc.]

15. Cercul $P_1C'M_1$ având segmentul $M_1C'P_1$ capabil de unghiul C, tangenta în P_1 la acest cerc (în sensul lui P_1N_1) face cu coarda P_1M_1 un unghiu egal cu C, deci se aşterne pe P_1N_1; ca urmare *cercul* $M_1C'P_1$ *este cerc adjunct triunghiului* $M_1N_1P_1$ *relativ la latura* M_1P_1 *şi tangent laturei* P_1N_1.

Asemenea cercurile $P_1B'N_1$ şi $M_1A'N_1$ sunt cercuri adjuncte triunghiului $M_1N_1P_1$ tangente respectiv laturilor N_1M_1 şi M_1P_1.

Aşa dar, cercurile $M_1C'P_1$, $P_1B'N_1$, $N_1A'M_1$ se întâlnesc în acelaşi punct Ω_1, *care este primul punct Brocard în triunghiul* $M_1N_1P_1$.

Asemenea, cercurile $M_2B'N_2$, $N_2C'P_2$, $P_2A'M_2$ sunt cercuri adjuncte triunghiului $M_2N_2P_2$ tangente respectiv laturilor N_2P_2, P_2M_2, M_2N_2, deci ele se întâlnesc în acelaşi punct Ω_2'', care este al doilea punct *Brocard* în triunghiul $M_2N_2P_2$.

16. Să stabilim relaţia analoagă cu (16) în cazul de figură $\alpha < A$; B; C. Să presupunem de exemplu $\alpha < \omega$ (ω fiind unghiul lui *Brocard* al triunghiului fundamental A B C).

Avem:

$$\overline{M_1A''} = \frac{\overline{M_1P_1}\sin\alpha}{\sin A} \quad \text{şi} \quad \overline{M_1B''} = \frac{\overline{M_1N_1}\sin(B-\alpha)}{\sin B},$$

din care deducem:

$$\overline{A''B''} = \overline{M_1B''} - \overline{M_1A''} =$$

$$\frac{\overline{M_1N_1}\sin(B-\alpha)}{\sin B} - \frac{\overline{M_1P_1}\sin\alpha}{\sin A},$$

sau încă:

$$\overline{A''B''} = 2R_1\left[\frac{\sin C\sin(B-\alpha)}{\sin B} - \frac{\sin B\sin\alpha}{\sin A}\right];$$

dar

$$\overline{A''B''} = 2R''\sin C,$$

deci:

$$\frac{R_1}{R''} = \frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin A\sin C\sin(B-\alpha) - \sin\alpha\sin^2 B} =$$

$$\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin\alpha\sin A\sin B\sin C(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\omega)},$$

sau:

$$\frac{R_1}{R''} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega\cos\alpha - \sin\alpha\cos\omega} = \frac{\sin\omega}{\sin(\omega-\alpha)}.$$

In general avem:

$$(16') \qquad \frac{R''}{R_1} = \frac{|\sin(\omega-\alpha)|}{\sin\omega}.$$

şi cum $\frac{R_1}{R} = 2\cos\alpha$, urmează că:

$$(17') \qquad \boxed{\frac{R''}{R} = \frac{2\cos\alpha\,|\sin(\omega-\alpha)|}{\sin\omega}}.$$

Dacă α la limită îl luăm egal cu ω, triunghiul $A''B''C''$ se reduce la punctul K' (al lui *Lemoine* comun triunghiurilor $A'B'C'$ şi $A''B''C''$), *care este în acelaşi timp primul punct al lui Brocard*

în triunghiul $M_2N_2P_2$ *şi al doilea punct Brocard în triunghiul* $M_1N_1P_1$.

Cercul (T) *al celor şase puncte, este în acest caz primul cerc al lui Lemoine relativ la triunghiul* $A'B'C'$.

NOTE MATEMATICE

6. — *Quelques carrés magiques d'un genre particulier.*

Nous allons donner quelques exemples de carrés magiques d'ordre pair dans lesquels les nombres placés sur les rangées *horizontales* ou *verticales* ont la même somme, avec cette condition supplémentaire que les carrés des nombres sur les lignes *horizontales* ont même somme.

A. Carré magique du 6e ordre formé avec 8 nombres différents (les 7 premiers nombres et 0).

2	2	2	3	5	7
1	2	3	3	6	6
1	2	3	4	4	7
6	5	4	4	1	1
6	5	4	3	3	0
5	5	5	4	2	0

$2+2+2+3+5+7=\cdots$

$2+1+1+6+6+5=\ldots$ (21)

$2^2+2^2+2^2+3^2+5^2+7^2=\cdots$ (95).

B. Carré magique du 6e ordre formé avec 12 nombres différents (les 11 premiers nombres et 0).

2	3	4	7	6	11
2	3	3	7	8	10
1	4	5	6	6	11
9	8	8	4	3	1
10	7	6	5	5	0
9	8	7	4	5	0

$2+3+4+7+6+11=\cdots$

$2+2+1+9+10+9=\cdots$ (33)

$2^2+3^2+4^2+7^2+6^2+11^2=\cdots$ (235).

C. Carré magique du 8a ordre formé avec 13 nombres différents (les 12 premiers nombres et 0).

3	0	7	7	8	9	10	10
1	2	6	7	9	9	10	10
2	5	5	5	6	7	12	12
3	4	4	5	7	7	12	12
11	11	9	8	6	4	3	2
11	10	9	9	6	5	2	2
12	11	8	6	6	5	5	1
11	11	6	7	6	8	0	5

$3+0+7+7+8+9+10+10=\cdots$

$3+1+2+3+11+11+12+11=\cdots$ (54)

$3^2+0^2+7^2+7^2+8^2+9^2+10^2+10^2=\cdots$ (452).

Ces exemples sont tous formés avec des entiers consécutifs.

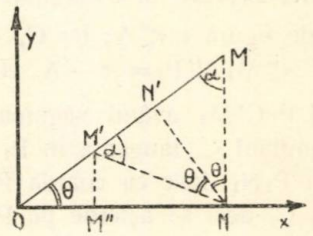
Le procédé qui me les a formés est applicable à des carrés d'un ordre pair quelconque.

La question de savoir si l'on peut former des carrés de ce type d'ordre n avec n^2 nombre différents, reste ouverte

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

7. — *O transformare punctuală birațională.*

Consider un punct oarecare $M(x,y)$, referit la un sistem de coordonate $x\,O\,y$.



Din piciorul N al ordonatei punctului M, se duce o dreaptă N M′, astfel ca unghiul format de O M cu M N, să fie egal cu unghiul format de O M cu M′ N

$$\widehat{OMN}=\widehat{NM'M}=\hat{\alpha}.$$

In acest caz, la fiecare punct M al planului, îi corespunde un punct M′; punctele O, M şi M′ sunt colineare.

In cele ce urmează, voi arăta că dacă punctul M, va descrie drepte, punctul M′ va descrie o clasă

de cubice nodate şi M′ descriind drepte, M va descrie deasemeni cubice nodate.

I. *Formule de transformare:*

Construim punctul M′, după cum am arătat mai înainte.

In triunghiul dreptunghic O M N, avem relaţiile:

$$(I) \qquad \overline{N N'}^2 = \overline{O N'} \cdot \overline{N' M}$$

$$(II) \qquad \frac{\overline{M' M''}}{\overline{M N}} = \frac{\overline{O M''}}{\overline{O N}} .$$

Ţinând seama că:

$$N N' = y \cos \theta \qquad (\theta = \widehat{M O x})$$

$$O N' = \frac{x'}{\cos \theta} + y \sin \theta \qquad (\overline{O N'} = \overline{O M'} + \overline{M' N'})$$

$$N' M = M' N' = y \sin \theta,$$

relaţiile (I) şi (II), devin:

$$(I') \qquad y \cos^2 \theta = \left(\frac{x'}{\cos \theta} + y \sin \theta\right) \sin \theta$$

$$(II') \qquad \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} .$$

Observând că:

$$\widehat{M N N'} = \widehat{M O N} = \theta$$

şi că tg θ este coeficientul unghiular al dreptei O M, relaţia (I′) se poate scrie:

$$y \cos^2 \theta = x' \operatorname{tg} \theta + y \sin^2 \theta.$$

Insă:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + m^2}, \qquad \sin^2 \theta = \frac{m^2}{1 + m^2}, \qquad \left(m = \frac{y}{x}\right)$$

rezultă:

$$y = x' m (1 + m^2) + y m^2$$

care ne dă x':

$$x' = \frac{y (1 - m^2)}{m (1 + m^2)} = \frac{y \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)}{\frac{y}{x} \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} = \frac{x (x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

(A) şi analog obţinem:

$$y' = \frac{y (x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} .$$

Formulele (A) sunt formulele de legătură între punctul M $(x . y)$ şi punctul M′ (x', y'). In mod analog, fiind dat punctul M′ (x', y'), obţinem pentru coordonatele punctului M (x, y), formulele de transformare următoare:

$$(B) \qquad x = \frac{x' (x'^2 + y'^2)}{x'^2 - y'^2}, \qquad y = \frac{y' (x'^2 + y'^2)}{x'^2 - y'^2} .$$

Pentru cazul când sistemul de axe $x O y$, este oblic, formând un unghiu oarecare α, atunci formulele de transformare (A), după calcule analoage, devin:

$$(A') \qquad \begin{aligned} x' &= \frac{x (x^2 - y^2 + 2 x y \cos \alpha)}{x^2 + y^2 + 2 x y \cos \alpha} \\ y' &= \frac{y (x^2 - y^2 + 2 x y \cos \alpha)}{x^2 + y^2 + 2 x y \cos \alpha} , \end{aligned}$$

unde se vede imediat că pentru $\alpha = 90^0$, regăsim formulele (A).

II. *a.* Să presupunem că M, descrie dreapta O M $(y = m x)$; făcând uz de formulele (B), obţinem:

$$(1) \qquad (y' - m x') (x'^2 + y'^2) = 0,$$

care este o cubică degenerată, ce se descompune în dreapta O M însăşi şi dreptele izotrope ale planului.

Deasemeni, dacă M descrie axele, obţinem cubicele:

$$(2) \qquad x' (x'^2 + y'^2) = 0, \qquad (x = 0)$$

$$(3) \qquad y' (x'^2 + y'^2) = 0, \qquad (y = 0)$$

ce degenerează în dreptele isotrope ale planului şi axul respectiv.

b. Să considerăm cazul când punctul M descrie drepte paralele cu axele de coordonate:

$$y = \pm k \quad \text{şi} \quad x = \pm k.$$

In acest caz, M′ va descrie cubicele:

$$(4) \qquad \begin{aligned} y' (x'^2 + y'^2) \pm k (x'^2 - y'^2) &= 0 \\ x' (x'^2 + y'^2) \pm k (x'^2 - y'^2) &= 0. \end{aligned}$$

Aceste cubice sunt *Strofoide,* a căror pol[1]), se găseşte pe rând pe axa absciselor (pozitivă şi negativă) şi axa ordonatelor (pozitivă şi negativă). Baza — distanţa de la punctul dublu la pol — fiind (k).

Se observă că aceste cubice, au un nod propriu zis în origină.

[1]) *Niewenglowski* — Géom. Anal. V. II.

c. Să considerăm acum cazul general, când M descrie o dreaptă oarecare. Fie Δ dreapta descrisă de M:

$$(\Delta) \qquad a x + b y + c = 0$$

Punctul M′ va descrie cubica următoare:

$$(5)\ a x'^3 + b y'^3 + a x' y'^2 + b x'^2 y' + c(x'^2 - y'^2) = 0.$$

Această cubică (5), împreună cu cubicele (4) formează *o clasă de cubice nodate, pentru cari origina este sub nod*[2] *propriu zis,* pentrucă coeficienții unghiulari ai tangentelor principale sunt reali.

Tangentele principale ale acestor cubice — drepte osculatoare ale curbelor — au ca ecuație curba:

$$x^2 - y^2 = 0.$$

Adică, aceste tangente sunt dreptele ce trec prin origine și sunt bisectoare ale axelor. Ea este de gen zero, având punctele flexionare *coliniate.*

Cubicele (1), (2) și (3) formează *o clasă de cubice ce se descompun în trei drepte,* dintre cari două sunt dreptele isotrope ale planului, cealaltă fiind axul respectiv sau dreapta O M.

III. $\overline{a'}$) Să presupunem punctul M′ (x', y') dat; și în acest caz urmând același raționament și aceiași așezare, să calculăm cu ajutorul formulelor de corespondență (A), cari sunt cubicele ce corespund aceloraşi cazuri:

Presupunem că M′ descrie dreapta O M′, obținem cubica:

$$y(x^2 - y^2) - m x(x^2 - y^2) - 0.$$

sau:

$$(1') \qquad (y - m x)(x + y)\ x - y) = 0.$$

Pentru cazul când M′ descrie axele, punctul M corespunzător va descrie cubicele:

$$(2') \qquad y(x + y)(x - y) = 0$$

pentru: $y = 0$; și

$$(3') \qquad x(x + y)(x - y) = 0$$

pentru: $x = 0$.

Aceste cubice, ca și cubicele (1), (2) și (3) sunt degenerate în trei drepte. Spre deosebire de acelea, acestea sunt fascicole de trei drepte reale. (axul respectiv sau dreapta O M și bisectoarele unghiului $x\,O\,y$). Ele au învariantul hesian nul,[3] (H = 0.

[2]) *F. Enriques – O Chisini.* Teoria geometrica delle equazioni.

[3]) *Clebsch - Lindeman.* Leçons sur la Géom. T. II (pag. 351)

Acestea represintă prin urmare *o clasă de cubice ce se descompun într'un fascicol de trei drepte, cu punctul triplu în origină.*

b′. Fie acum cazul când punctul M′ descrie drepte paralele cu axele:

$$x' = \pm k \quad \text{și} \quad y' = \pm k,$$

punctul corespunzător M va descrie cubicile:

$$(4') \qquad \begin{cases} x(x^2 - y^2) \pm k(x^2 + y^2) = 0 \\ y(x^2 - y^2) \pm k(x^2 + y^2) = 0 \end{cases}$$

și acum cazul general când M′ descrie o dreaptă oarecare Δ′.

$$(\Delta') \qquad a x' + b y' + c = 0$$

îi va corespunde cubica:

$$(5') \qquad (a x + b y)(x^2 - y^2) + c(x^2 + y^2) = 0.$$

Cubicele (4′) și (5′) formează *o clasă de cubice cu punct dublu izolat.*

Punctul dublu isolat este format de origină. Tangentele principale sunt dreptele isotrope date de ecuația:

$$x^2 + y^2 = 0.$$

IV. Să calculăm fascicolele sisigetice ale cubicilor (5) și (5′), aceste fascicole conțin triunghiurile flexionale, și vor avea aceleași puncte duble (propriu zise sau nu), cu aceleași tangente principale.

Aceste fascicole vor fi:

$$F_1 + \lambda H_1 = 0$$
$$F_2 + \lambda H_2 = 0$$

unde F_1 și H_1 sunt cubica și hesianul ei pentru (5) și F_2, H_2 cubica (5′) cu hesianul respectiv.

Vom avea:

$$H_1 = \begin{vmatrix} 6a x + 2c z + 2b y & 2a y + 2b x & 2c x \\ 2a y + 2b x & 6b y + 2a x - 2c x & -2c y \\ 2c x & -2c y & 0 \end{vmatrix}.$$

care se mai poate scrie:

$$H_1 = \frac{4c^2}{xy} \begin{vmatrix} y\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} & x\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x\,\partial y} & x \\ y\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x\,\partial y} & x\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} & -y \\ x y & -x y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -4c^2\left(y^2\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\,\partial y} + x^2\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}\right)$$

$$= -8c^2[\varphi_3(x,y) + c(y^2 - x^2)],$$

unde am notat prin $\varphi_3(x,y)$ grupul omogen de gradul 3. $(z=1)$.

Fascicolul căutat va fi deci:

$$f_3(x,y) + c(x^2 - y^2) - 8\lambda c^2[\varphi_3(x,y) + c(y^2 - x^2)] = 0,$$

$$(5\alpha)\quad (1 - 8\lambda c^2)\,\Phi_3(x,y) + c(1 + 8\lambda c^2)(x^2 - y^2) = 0$$

unde Φ_3 are aceiaşi semnificaţie ca φ_3 şi f_3.

In acelaşi mod calculăm fascicolul sisigetic, corespunzător cubicilor (5′), obţinând:

$$(5\beta)\quad (1 + 8\lambda c^2)\,\Phi_3(x,y) + c(1 - 8\lambda c^2)(y^2 + x^2) = 0.$$

Din ecuaţiile (5α) şi (5β) se vede, că pentru valoarea:

$$\lambda = \frac{1}{8c^2},$$

primul fascicol se reduce la dreptele reale:

$$y^2 - x^2 = 0,$$

iar al doilea la cubica:

$$\Phi_3(x,y) = 0,$$

iar pentru valoarea: $\lambda = -\frac{1}{8c^2}$,

cel de al doilea fascicol se reduce la dreptele izotrope:

$$x^2 + y^2 = 0$$

şi cel dintăi la cubica:

$$\Phi_3(x,y) = 0.$$

Observare I. Dreptele la cari se reduc fascicolele sisigetice pentru valorile lui λ arătate, sunt tocmai tangentele principale ale punctului dublu aparţinând curbei fundamentale.

II. Dacă se formează fascicole cu cubicele (4) şi (4′) obţinem deasemeni cubice cu punct dublu (propriu zis sau izolat).

III. Această transformare se poate extinde şi în spaţiul cu trei dimensiuni, a căror formule de transformare sunt analoage celor obţinute pentru plan.

MIHAIL ST. BOTEZ

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLV, No. 8, Aprilie 1940. *Antioh Cantemir* (urmare), de *I. Ionescu*. *Gheorghe Ţiţeica* (urmare), de *Gh. Th. Gheorghiu*. Produsul a patru numere întregi în progresie aritmetică poate fi un patrat?, de *I. B Florescu*. Premiul „Inginer *Al. Roşu*. Note matematice. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *Boletin Matematico*, Anul XIII, N-rile 1 şi 2, Martie 1940, *Buenos Aires*. Cuvinte inaugurale, de *B I. Badaff*. Scurtă recapitulare ale autorilor care au publicat articole în primii 12 ani în *Boletin Matematico*, de *B. I. Baidaff*. Asupra unei teoreme referitoare la punctele singulare ale funcţiunilor analitice definite prin serii generale *Dirichlet*, de *C. Biggeri* Asupra reprezentării asimptotice a funcţiunilor de tip *Bessel*, de *C. V. Newson* şi *A Franck*. Informaţii bibliografice. Note şi probleme, de *B. I. Baidaff*. Reenumerarea activităţii autorilor notelor matematice, de *A. Amenta* Asupra ecuaţiuni,

$$\frac{(m-1)(m-2)}{6}\sum_{i=1}^{3} x_i^3 - \sum x_p x_r x_s = k y^2,\ (m \equiv 1 \bmod 3),$$

şi

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}\sum_{i=1}^{3} x_i^3 - 3\sum x_p x_r x_s = k y^2,\ m \equiv 0 \pmod 3),$$

de *A. Gloden*. Probleme rezolvate şi propuse.

3. *Buletinul Facultăţii de Agronomie din Cluj*, Vol. VIII, 1939—40. Cuprinde articole de specialitate ale corpului didactic al facultăţii

4. *Pitagora*, revistă de matematici, anul V, N-rile 7—8 Aprilie-Maiu 1940. Despre natura cantităţilor imaginare, de *S. Stoilov*. Asupra unei transformări, de *Th. Cocea*. Asupra unor sume trigonometrice, de *M. Botez*. Despre amortizarea împrumuturilor, de *C. Iacob*. Generalizări în legătură cu epurele de geometrie descriptivă, de *N. Mihăileanu*. Asupra unei teoreme a D-lui *Pompeiu*, de *G. G. Constantinescu*. Note, probleme rezolvate şi propuse.

5. *V. Thébault*. Rectangles semblables associés à un triangle. (Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, extrait).

6. *Gh. Th. Gheorghiu*. Sur les surfaces de *Tzitzeica*. (Extrait du Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées, de l'École Polytechnique *Roi Carol II*, X-ème année, Fasc. 28, 29, 30).

7. *Gh. Th. Gheorghiu. Probleme de Analiză Matematică*, partea I-a, conţine şiruri, serii, derivate, dezvoltări în serii, limite, variaţii de funcţiuni, schimbări de variabile Această *Culegere* de 300 pagini, litografiate, cuprinde 238 de probleme împreună cu soluţiile lor. Aceste probleme cu atenţie şi pricepere selecţionate, sunt de un folos real studenţilor de ştiinţe şi a şcolilor politechnice, cărora le-o recomandăm cu toată convingerea.

8. *Mihail St. Botez. Metode de rezolvare a ecuaţiilor trigonometrice.* (Monografia No. 4 din biblioteca Revistei „*Pitagora*“.)

O recomandăm cu plăcere corespondenţilor nostrii, ea cuprinzând exemple şi metode interesante de rezolvarea ecuaţiilor trigonometrice.

9. *N. Gavrilian*. Curs sistematic şi metodic de *Aritmetică Practică*, pentru repetarea materiei după programele liceelor şi gimnaziilor de tot felul, şcoalelor normale şi seminariilor.

Credem că merită toată atenţia celor cărora se adresează, fiindu-le în adevar folositoare.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 369. — *Să se găsească două patrate perfecte de forma a b c d şi a' b' c' d' astfel ca numerele a b şi a' b' să fie consecutive, iar c d şi c' d', patrate consecutive*

D-TRU N. BELDIE

Fie

$$a\,b = n \quad {}^{*}_{*}{}^{*} \quad a'\,b' = n \pm 1$$

$$c\,d = p^2 \quad {}^{*}_{*}{}^{*} \quad c'\,d' = (p \pm 1)^2,$$

iar t numărul cifrelor lui $c\,d$ sau $c'\,d'$. Dacă N^2, M^2 sunt patratele căutate, atunci

$$N^2 = n \times 10^t + p^2$$

$$M = (n \pm 1)\,10^t + (p \pm 1)^2$$

semnele din ecuaţia a doua necorespunzându-se neapărat. Scăzând aceste ecuaţiuni una din alta, avem

(1) $$N^2 - M^2 = 10^t \pm 2p - 1$$

(2) $$M^2 - N^2 = 10^t \pm 2p + 1.$$

Pentru un t şi un p dat, ecuaţiile (1) şi (2) se rezolvă cu mare uşurinţă în numere întregi.

Considerăm de exemplu prima din ecuaţiile (1), care se mai scrie

(3) $$(N + M)(N - M) = 10^t + 2p - 1.$$

Dacă $\alpha > \beta$ sunt numere de aceiaşi paritate şi dacă

$$\alpha \times \beta = 10^t + 2p - 1,$$

atunci soluţiile ecuaţiei (3) sunt

$$N = \frac{\alpha + \beta}{2}, \qquad M = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Vom avea atâtea grupe de soluţii N, M pentru (3), câte grupe (α, β) vom avea. Din aceste grupe se vor alege acelea care răspund şi la celalalte condiţiuni.

Dacă însă $a\,b\,c\,d$ şi $a'\,b'\,c'\,d'$ sunt numere de câte 4 cifre, ceiace enunţul nu specifică, atunci $t = 2$, iar $c\,d$ şi $c'\,d'$ sunt două patrate consecutive de două cifre, adică $c\,d$ şi $c'\,d'$ sunt date de următorul tabel

$c\,d$	00	01	04	09	16	25
$c'\,d'$	01	00,04	01,09	04,16	09,25	16,36

$c\,d$	36	49	64	81
$c'\,d'$	25,49	36,64	49,81	64

Ducând pe rând aceste valori în (1) şi (2) găsim următoarele 19 grupe de soluţiuni ale problemei:

$01^2 = 0001$	$41^2 = 1681$	$42^2 = 1764$	$43^2 = 1849$
$10^2 = 0100$	$42^2 = 1764$	$43^2 = 1849$	$44^2 = 1936$
$44^2 = 1936$	$45^2 = 2025$	$46^2 = 2116$	$47^2 = 2209$
$45^2 = 2025$	$46^2 = 2116$	$47^2 = 2209$	$48^2 = 2304$
$48^2 = 2304$	$49^2 = 2401$	$50^2 = 2500$	$51^2 = 2601$
$49^2 = 2401$	$50^2 = 2500$	$51^2 = 2601$	$52^2 = 2704$
$52^2 = 2704$	$53^2 = 2809$	$54^2 = 2916$	$55^2 = 3025$
$53^2 = 2809$	$54^2 = 2916$	$55^2 = 3025$	$56^2 = 3136$
$56^2 = 3136$	$57^2 = 3249$	$58^2 = 3364$	
$57^2 = 3249$	$58^2 = 3364$	$59^2 = 3481$	

Dacă se elimină prima grupă, care dă numai formal numere de 4 cifre, atunci problema are 18 soluţiuni.

Se observă că rădăcinele patrate ale soluţiunilor sunt toate numerele consecutive de la 41 la 59 inclusiv.

Observaţiuni 1°. In *Gazeta Matematică*, Vol. X, pag. 95, s-a rezolvat problema 938 cu enunţ analog, dar mai restrictiv, anume se cerea ca $a\,b\,c\,d$ şi $a'\,b'\,c'\,d'$ să fie patrate consecutive. Cu această restricţie problema se rezolvă mai elegant, căutând soluţiile sistemelor

$$(N+1)^2 = 100\,(m+1) + n^2 \quad \begin{cases} (N+1)^2 = 100\,(m+1) + (n+1)^2 \\ N^2 = 100\,m + (n+1)^2 \end{cases} \quad N^2 = 100\,m + n^2$$

Se găseşte

$$N = 49 - n \quad \text{şi} \quad N = 50 + n$$

cu $n < 8$, căci altfel $n + 1$ ar fi mai mare ca 10.

Se vede că problema 938 din *Gazeta Matematică* şi problema 369 din R. M. T. au aceleaşi soluţiuni.

2°. Ca la toate problemele de acest gen, la care se cere atenţie la examinarea diferitelor cazuri, corespondenţii care s-au ocupat de problema 369, au găsit un număr variat de soluţiuni. Le dăm, după cum urmează, numele indicând şi numărul de soluţiuni.

18 soluţiuni au dat: *Braester O., Căldăraru L., Călin M. Gh., Ghişoiu I. P., Grecu M. Cr., Ionescu-Bujor Th. C., Nedelcu Gh. I., Popescu N. Corneliu, Tărăbuţă C. P.* şi *Teodorescu N.*

17 soluţiuni: *Nestor G. D.*

16 soluţiuni: *Akerman C., Beşchea N., Katz L., Popa Gh. I.* şi *Purdilă C.*

11 soluţiuni: *Lepădatu I. V.* şi *Marcovici M. M.*

10 soluţiuni: *Berdan C., Florea C. Al., Gataianţu V. B, Georgescu-Val N. I., Neacşu V., Popovici C. C., Popovici Th. I, Ţanovici V. C., Tăraş V., Ulea C. T.* şi *Vasiliu Gh.*

9 soluţiuni: *Blasko Beatrice, Botea N., Diaconescu V. T., Dimitrescu A. M., Ionescu P. H., Polaczek Fr., Savin C. I., Scripă V., Şerban Tib., Simionescu D. Gh., Spârchez Z.* şi *Ştefănescu Em.*

8 soluţiuni: *Brezuica C. I. I., Georgescu J., Iliuţă I. I., Manoil Ad. Raiciu V. C., Râmniceanu I. Cr.* şi *Zamfirescu Gh. I.*

7 soluţiuni: *Grofşoreanu L. Gh.* şi *Novacu A. V.*

6 soluţiuni: *Neumann Maria, Ardelea R, Curcubătă D., Dorneanu S. V., Drăgan G., Grubermann I. Gr., Lupescu Gh. C., Marinescu S. D.* şi *Podeanu A.*

5 soluţiuni: *Frăsineanu Mărioara, Brăileanu I. M., Diaconu B. M, Dugan C. V., Florescu M. O., Gavrilescu N. I, Segărceanu D. C., Stănescu I. A., Stoicescu T.* şi *Vasiliu C. V. I.*

4 soluţiuni: *Apăteanu T. Al., Bolgar V. M., Drăghcean M., Iacob St. E.* şi *Stamatiu M.*

3 soluţiuni: *Vlădea I.*

2 soluţiuni: *Dumitrescu Gh. I., Lateş I. V.* şi *Rezeanu M.*

1 soluţiune: *Podariu Al., Roşu A. Al.* şi *Zaharia O. I.*

In fine 4 rezolvitori pe care nu-i citãm au găsit că problema nu are nici-o soluţie.

Este interesant că la 9 soluţiuni sunt maximum de rezolvitori ceiace *nu* probează că aurea mediocritas.

Gh. B.

Problema 1713. — *In ce sistem de numeraţie, un număr de forma a a b b este al patratul numărului de două cifre c c, fiind dat că* $c+1$ *este egal cu* $2a$*?*

V. THÉBAULT

Soluţie, dată de d-l *Bakoʻyi C.* (lic. Loga, Timişoara).

Egalitatea $a\,a\,b\,b = (c\,c)^2$, cum a dovedit autorul problemei în nota matematică „*Remarques des carrés curieux*“ din „R. M. T.“, an. XVI, p. 55, conduce la relaţiile:

(1) $c^2 = (a-1)^2 + a\,b$, (2) $B = a + b - 1$,

B fiind baza sistemului de numeraţie căutat.

Prin ipoteză însă,

$$c+1 = 2a, \qquad \text{deci:} \qquad c = 2a-1,$$

valoare care înlocuită în (1) ne dă:

$$(2a-1)^2 = (a-1)^2 + a\,b,$$

de unde

$$3a^2 = 2a + a\,b,$$

sau

(3) $3a = 2 + b$, fiindcă $a \neq 0$.

Pentru a avea soluţii întregi pentru ecuaţia (3), trebuie să luăm

(4) $b = 3k+1$ şi atunci rezultă, $a = k+1$.

(k întreg, pozitiv).

Inlocuind aceste valori ale lui a şi b în (2), obţinem:

$$\boxed{B = 4k+1}.$$

De asemeni,

$$c = 2a - 1 = 2k + 1.$$

Exemple numerice. Putem forma următorul tablou, care să cuprinde valorile lui a, b, c, B, pentru $k = 1, 2, 3, \ldots$

	$k=0.$	$k=1.$	$k=2.$	$k=3.$	$k=4.$	. . . . .
a	1	2	3	4	5	. . . . .
b	1	4	7	10	13	. . . . .
c	1	3	5	7	9	. . . . .
B	1	5	9	13	17	. . . . .

De aci avem soluţiile

$$(11\,11)_1 = (11)_1$$
$$(22\,44)_5 = (33)_5$$
$$(33\,77)_9 = (55)_9$$
$$(44\,\overline{10}\,\overline{10})_{13} = (77)_{13}$$
$$(55\,\overline{13}\,\overline{13})_{17} = (99)_{17}$$
. . . . . .
. . . . . .

Pentru baza cerută B, avem 1, 5, 9, 13, 17,.. de forma $4k+1$.

Au mai trimes bune soluţii d-nii: *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Diaconescu D. Ion* (lic. T-Severin), *Jidanu C-tin* (Şc. Polit, Timişoara) şi *Tulică C. Ştefan* (Şc. Preg. de Ofiţeri).

Problema 1720. — *Să se găsească patratele perfecte de cinci cifre de forma a b c b c din care se obţin următoarele trei patrate perfecte*

a c c b b, c c a b b, c b c b a.

N ANITESCU

Soluţie. Numărul $b\,b$ fiind terminaţie de patrat perfect, nu putem avea de cât

$$b = 0 \qquad \text{şi} \qquad b = 4$$

deci patratul cerut poate fi

(1) $\qquad a\,0\,c\,0\,c \qquad$ sau: $\qquad a\,4\,c\,4\,c.$

$0\,c$ şi $4\,c$ fiind terminaţii de patrat perfect, c poate fi 1, 4, 9, având în vedere terminaţiile de două cifre ale unui patrat perfect (C. de P. Cap. XLVIII), astfel că patratele din (1) pot fi

$$\begin{array}{lll} a\,0\,1\,0\,1 & & a\,4\,1\,4\,1 \\ a\,0\,4\,0\,4 & \text{sau:} & a\,4\,4\,4\,4 \\ a\,0\,9\,0\,9 & & a\,4\,9\,4\,9. \end{array} \tag{2}$$

In baza ultimului patrat din enunţ, rezultă că $0\,a$ şi $4\,a$ sunt terminaţii de patrat perfect, deci conchidem ca mai sus că a poate fi 1, 4, 9.

Inlocuind în (2) pe a succesiv prin 1, 4, 9, printre numerile astfel obţinute se află patratul perfect cerut.

Lăsând la o parte dintre numerile astfel obţinute pe acelea care se divid prin 3 fără a se divide şi cu 9, rămân numerile

$$\begin{array}{ll} & 1\,4\,1\,4\,1 \\ 9\,0\,1\,0\,1 & 4\,4\,1\,4\,1 \\ 1\,0\,4\,0\,4 & 9\,4\,1\,4\,1 \\ 9\,0\,4\,0\,4 & 1\,4\,4\,4\,4 \\ 1\,0\,9\,0\,9 & 4\,4\,4\,4\,4 \\ 4\,0\,9\,0\,9 & 9\,4\,4\,4\,4 \\ 9\,0\,9\,0\,9 & 1\,4\,9\,4\,9 \\ & 9\,4\,9\,4\,9, \end{array} \tag{3}$$

printre care se va găsi patratul cerut.

Ţinând seamă că un patrat perfect divizat prin 9 nu poate da de cât resturile 1, 4, 0, 7, rezultă că din (3), numerile

90101, 90404, 14141, 44141, 14444, 44444, 94949

nu pot fi patrate perfecte. Rezultă că patratul cerut se va afla printre numerile rămase din (3), care sunt:

(4) 10404, 10909, 40909, 90909, 94141, 94444, 14949.

Ţinând încă seamă că un patrat perfect divizat prin 16 nu poate da de cât resturile 1, 4, 9, 0, rezultă că din (4), numerile

10909, 40909, 90909, 94141, 94444, 14949

nu pot fi patrate perfecte.

Din şirul (4) singurul număr care ar putea fi patrat perfect este prin urmare numai 10404. In adevăr acest număr este patrat perfect căci avem,

$$10404 = 102^2$$

şi pe de altă parte el îndeplineşte şi celelalte condiţii ale enunţului, căci în adevăr numerile $a\,c\,c\,b\,b$, $c\,c\,a\,b\,b$, $c\,b\,c\,b\,a$, ce se pot forma din $a\,b\,c\,b\,c =$ 10404 sunt patrate perfecte, fiindcă în cazul nostru,

$$a\,c\,c\,b\,b = 14400 = 120^2$$

$$c\,c\,a\,b\,b = 44100 = 210^2$$

$$c\,b\,c\,b\,a = 40401 = 201^2.$$

Urmează că problema admite singura soluţie, 10404.

Au trimis soluţii: *Becu Crum, Bârlea Suhăţeanu V.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Borneas Marius, Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Cherţman S. Mozes* (lic. Giurgiu), *Dăscălescu St. Hristache* (Focşani), *Doscan Gh. Alexandru* (lic. Giurgiu), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Hermann Carol* (Blaj), *Jidanu I. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt., Roman), *Pettechi Mihai* (lic. Institutul Român, Sofia), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Stamate I. Ionel* (student, Cluj), *Tătaru Alexandru* (lic. Orăştie), *Tilică C. Ştefan* (Şc. Preg. de Ofiţeri) şi *Venter D-tru.*

Problema 1729. — *Să se găsească un patrat perfect de forma $a\,b\,a\,c\,a$, în care $b = a + c$, iar $a\,c$ este patrat perfect.*

S-T. MARIN STEFANESCU

Soluţie. Prin enunţ $a\,c$ fiind patrat perfect, poate fi

(1) $\qquad$ 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Patratul cerut fiind terminat prin $c\,a$, inseamnă că el s'ar putea termina, având în vedere şirul (1), cu

(2) $\qquad$ 61, 52, 63, 94, 46, 18.

De altă parte, ţinând seamă de terminaţiile de două cifre ale unui patrat perfect (C. de P. de aritmetică de *I. Ionescu*, Cap. XLVIII), nu putem reţine din şirul (2) de cât terminaţia 61, ceea ce dă, $c = 6$, $a = 1$.

Patratul cerut este deci de forma

$$1\,b\,1\,6\,1,$$

şi cum prin ipoteză $b = a + c = 1 + 6$, urmează $b = 7$, şi atunci patratul cerut ar putea fi, 17161. Cum uşor putem verifica că, în adevăr, aceasta este un patrat perfect, fiindcă

$$17161 = 131^2,$$

urmează că soluţia căutată este, 17161.

Soluţii date de d-rele: *Checian N. Ana* (lic. Carmen-Sylva, Timişoara), *Papadopol D. Elena* (lic. Bacău) şi de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timişoara), *Bârlea-Suhăţeanu Victor* (lic. Milit, N. Filipescu), *Bârzu Gh. Vasile* (lic. Milit, Iaşi), *Boiangiu D. D.* (lic T-Severin), *Brădeanu Nicolae* (lic. Beiuş), *Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Cherţman S. Mozes* (lic. Giurgiu), *Chintescu M. Matei* (lic. Milit, N. Filipescu), *Cristea I. C-tin* (lic. Milit., Chişinău), *Cristea I. Nicolae* (lic. Blaj), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Deheleanu I. Gheorghe* (lic. Beiuş), *Diaconescu D. Ion* (lic. T-Severin), *Doscan Gh. Alexandru* (lic. Giurgiu), *Dragomir Ermin Adrian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Gheorghiu A. Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Hermann I. Carol* (Blaj), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuş), *Logofătu M. Ioan* (lic. Beiuş), *Luca I. Ioan* (lic. Arad), *Lupescu Corneliu* (Sub Lt., Roman), *Mihăileanu C. Andreiu* (lic. Arad), *Mihoc N. Ovidiu*, *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Moldovan Corneliu* (Şc. Polit., Timişoara), *Popoviciu Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Radu Gh. Ionel* (lic. Deva), *Săruleşteanu I. Emanoil* (Bucureşti), *Schapira Salo* (lic. Piatra-Neamţ), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Şelmeneanu L. Horia* (lic. Orăştie), *Şerban C. C-tin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Slavov Iakob* (Bolgrad), *Spătaru Alexandru* (lic Cluj), (lic. Cluj), *Staicu I. N.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stamate I. Ionel* (student, Cluj), *Tătaru Alexandru* (lic. Orăştie), *Tica P. Marin-Gal* (Lt.), *Tilică C. Ştefan* (Şc. Preg. de Ofiţeri), *Văduva F. Marin* (lic. Giurgiu), *Venter D-tru* şi *Vijilie Gh. Eugen* (lic. Milit, N. Filipescu).

Problema 1734 — *Să se stabilească relaţiile:*

$$(1+i)^k + (1-i)^k = 2^{1+\frac{k}{2}} \cos\frac{k\pi}{4}$$

$$(1+i)^k - (1-i)^k = 2^{1+\frac{k}{2}} i \sin\frac{k\pi}{4},$$

unde $i = \sqrt{-1}$.

V. ALACI

Soluţie. Observând că putem scri

$$1 + i = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$1 - i = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

şi ridicând la puterea k, obţinem având în vedere formula lui *Moivre:*

$$(1+i)^k = 2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}\right)$$

$$(1-i)^k = 2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{k\pi}{4} - i\sin\frac{k\pi}{4}\right).$$

Dacă adunăm şi scădem aceste relaţii şi facem simplificările ce se impun, obţinem

$$(1+i)^k + (1-i)^k = 2^{1+\frac{k}{2}} \cos\frac{k\pi}{4}$$

$$(1+i)^k - (1-i)^k = 2^{1+\frac{k}{2}} i \sin\frac{k\pi}{4},$$

adică tocmai relaţiile cerute.

Soluţii date de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timişoara), *Bighea Ion* (lic. Sibiu), *Borneas Marius* (Şc. Polit., Timişoara), *Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Goga Fl.*, *Jidanu C-tin* (Şc. Polit, Timişoara), *Mahrenholtz* (Cottous, Germania), *Mocanu I. C-tin* (lic Milit, Cernăuţi), *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Mureşan I. Octavian* (lic. Arad), *Segal Zigu* (lic Vaslui), *Stamate I. Ionel* (student, Cluj), *Tica P. Marin-Gall* (Lt), *Venter D-tru* şi *Vişa Eugen* (prof., Tg-Mureş).

Problema 1735. — *Să se arate că în orice triunghiu există relaţia:*

$$\frac{c^2 \sin 2A + 2(a^2 - b^2)\sin C - c^2 \sin 2B}{c^2 \sin 2B + 2(a^2 - b^2)\sin C - c^2 \sin 2A} = \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}.$$

SUB-LT MIRCEA GRUMAZESCU

Soluţie. Din relaţiile cunoscute

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

deducem

$$\frac{c^2}{a^2 - b^2} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 A - \sin^2 B} =$$

$$\frac{\sin^2 C}{\sin(A+B)\sin(A-B)} = \frac{\sin C}{\sin(A-B)},$$

sau:

$$(a^2 - b^2)\sin C = c^2 \sin(A - B).$$

In virtutea acestei relaţii şi a unor transformări şi simplificări uşor de urmărit, primul membru din enunţ, notat cu E, se poate scri succesiv:

$$E=\frac{c^2\sin 2A+2c^2\sin(A-B)-c^2\sin 2B}{c^2\sin 2B+2c^2\sin(A-B)-c^2\sin 2A}=$$

$$\frac{\sin 2A-\sin 2B+2\sin(A-B)}{\sin 2B-\sin 2A+2\sin(A-B)}=$$

$$\frac{2\sin(A-B)\cos(A+B)+2\sin(A-B)}{2\sin(B-A)\cos(B+A)+2\sin(A+B)}=$$

$$\frac{1+\cos(A+B)}{1-\cos(A+B)}=\frac{1-\cos C}{1+\cos C}=\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}.$$

Astfel relaţia dată este stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Timişoara), *Brădeann Nicolae* (lic. Beiuş), *Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Cherţman S. Mozes* (lic. Giurgiu), *Chintescu Matei* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cristea I. Nicolae* (lic, Blaj), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Luca I. Ioan* (lic. Arad). *Mocanu I. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Modălcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Serban C. C-tin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tilică C. Ştefan* (Şc. Preg. de Ofiţeri) şi *Vijelie C. Eugen* (lic. Milit., N. Filipescu),

PROBLEME PROPUSE

1842. — Se cer patratele $m\,s\,z\,u$ astfel ca $(m+s)$, $(s+z)$, $(z+u)$ să fie numere prime.

MARIN F. VADUVA

1843. — Care este probabilitatea să se găsească 2 aşi într'un joc de 6 cărţi, extrase dintr'un pachet de 32 cărţi?

CORNELIU N POPESCU

1844. — Să se rezolve ecuaţiunea

$$x!+1=(x+1)^2,$$

în numere întregi pozitive.

G-L GH. BUICLIU

1845. — Să se găsească m în aşa fel ca ecuaţiile

$$x^2-3mx-2(m-1)=0$$

$$mx^2-4mx+3=0,$$

să aibă o rădăcină comună.

GH TH. GHEORGHIU

1846. — Să se găsească limita expresiunii

$$E=\frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\cdots+\sqrt[n]{x}-n}{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}}+\cdots+\sqrt[n]{\frac{1}{x}}-n},$$

pentru $x=1$, fără ajutorul derivatelor.

STEFAN MUSTA

1847. — Fie A_1, B_1, C_1, picioarele a trei ceviene concurente, în triunghiul ABC. Perpendicularele duse prin ortocentrul H al lui ABC pe AA_1, BB_1, CC_1 taie laturile BC, CA, AB în A_2, B_2, C_2. Să se arate că H este centrul radical al cercurilor AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2.

CEZAR IVANESCU

1848. — Intr'un triunghiu oarecare avem relaţia:

$$\frac{b^2(\cos C-\cos 2C)+c^2(\cos^2 B-\cos 2B)+2bc\cos B\cos C}{b^2\sin C\cos C-c^2\sin B\cos B}=2\operatorname{cotg}(B-C).$$

NICOLAE I. CRISTEA

1849. — Se cere graficul funcţiunei:

$$y=cp\,x+3\,sp\,x-1.$$

V. ALACI

ERATA.

In articolul *„Funcţiuni pseudo-hiperbolice“* din „R. M. T “, Anul XX, No. 2, se vor face îndreptările:

1. Pag. 20 col. I. rândul 5 de jos:
   In loc de *-hiperbotic* se va citi *-hiperbolic.*
2. Pag. 20 col. II. rândul 5 de jos:
   La numărătorul din membrul doi al primei formule din (8'), în loc de $cpk\,\alpha$ se va citi $cph\,\alpha$.
3. Pag. 21 col. II. rândul 13:
   In loc de $sph\,\alpha>\alpha\,sh\,\alpha$ se va citi $sph\,\alpha>sh\,\alpha$.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Bakonyi C. C. (1773, 1779, 1789, 1790, 1793); *Bighea I. Ion* (1774, 1779, 1787, 1785, 1799); *Boleanţu Lazăr* (1799, 1810); *Cherţman S. M.* (1799, 1807); *Facsko I. Gheorghe* (1834, 1940); *Mărgărit I. Nicolae* (P., 1752, 1761, 1763, 1768, 1773, 1774, 1776, 1777, 1779, 1799, 1807, 1817, 1818, 1827; 1834); *Necşescu I. Aurelian* (1834); *Petrescu R. Gheorghe* (1818, 1832, 1840); *Popescu N. Corneliu* (P. 1475, 1483, 1493, 1815, 1819, 1823, 1834, 1840); *Şenchi M Eugen* (1827, 1844); *Şerban C. C-tin* (1674, 1680, 1702) *Simu I. Simion* (1804, 1815, 1823); *Ţaralungă Savel* (P. 1753, 1776, 1777); *Vasiliev Andrei Boris* (1827, 1834 1835).

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait a Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 286 articles, 249 notes et 1892 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIII, s'a primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Prof. Ion Rizescu.* Str. Mihăileanu 18, Constanţa.
2. *Prof. Constantin Borş.* Str. Petru Rareş 85, Piatra Neamţ.
3. D-l *Marin I. Popa,* Licenţiat în Matematici. Bulevardul Alexandru I. Cuza 20, Bucureşti II.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XIX, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

A apărut volumul:

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ

de

VALERIU ALACI

Profesor, Şcoala Politechnică, Timişoara.

272 pagini — Preţul: 180 Lei.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XIX, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

ANUL XX. IUNIE 1940 No 4.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **O. N. TINO**: O CLASA INTERESANTA DE TRAPEZE.
2. **EUGEN VISA**: FUNCTIUNI PSEUDO-HIPERBOLICE. STUDIU ELEMENTAR.
3. NOTE MATEMATICE: 8, 9.
4. BIBLIOGRAFIE
5. PROBLEME REZOLVATE: 542, 1705, 1721, 1730, 1743.
6. PROBLEME PROPUSE: 1850-1857.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XX, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIX inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XX — No 4 TIMISOARA, IUNIE 1940

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

O CLASĂ INTERESANTĂ DE TRAPEZE

DE O. N. ȚINO

In cele ce urmează ne ocupăm de clasa trapezelor, care au proprietatea că, *triunghiul format de diagonale cu una din laturile trapezului este asemenea cu triunghiul din care a fost tăiat trapezul.*

Pe lângă că acest studiu dă la iveală proprietăți remarcabile în acest fel de trapeze, mai folosește și teoreme de geometrie puțin întâlnite în desvoltările obișnuite; acest din urmă fapt ne-a condus a-l publica ca studiu de îndrumare pentru corespondenții noștri.

Fie trapezul $ABCD$ $(\overline{AD} \parallel \overline{BC})$; I punctul de întâlnire al diagonalelor AC, BD; O punctul de întâlnire al laturilor neparalele BA, CD.

Pentru mai multă ușurință în expunerea rezultatelor, vom clasifica aceste trapeze în patru spețe și anume:

a. *Trapez de prima speță* în care ΔBIC este asemenea cu ΔBOC;

b. *Trapez de a doua speță* în care ΔAIB este asemenea cu ΔBOC, latura AB fiind omoloagă cu $\overline{OB}$;

c. *Trapez de a treia speță* în care ΔAIB este asemenea cu ΔBOC, latura AB fiind omoloagă cu OC;

d. *Trapez de a patra speță* în care ΔAIB este asemenea cu ΔBOC, latura AB fiind omoloaga bazei mari BC.

a. **Trapez de prima speță.** Triunghiul BIC format de diagonale cu baza mare BC. In acest caz, observând că $\sphericalangle IBC < \sphericalangle ABC$, triunghiul BIC poate fi asemenea cu triunghiul BOC numai în cazurile când avem fie $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ICB$, fie $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BIC$, care de altfel se reduc la un singur caz. In adevăr, dacă $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ICB$, urmează că $\sphericalangle IBC < \sphericalangle ICB$ și cum $\sphericalangle ICB < \sphericalangle DCB$, trebue ca $\sphericalangle IBC = \sphericalangle BOC$, iar $\sphericalangle BIC = \sphericalangle DCB$.

Dacă $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BIC$, atunci $\sphericalangle DCB\,(> \sphericalangle ICB)$ trebue să fie egal cu $\sphericalangle IBC$, deci $\sphericalangle ICB$ egal cu $\sphericalangle BOC$.

Se vede dar, că al doilea caz, este același cu primul, cele două laturi neparalele schimbându-se între ele. (Printr'o simetrie în raport cu o perpendiculară la baza trapezului, al doilea caz de poziție se schimbă în primul.)

Ficsăm deci, că în trapezul considerat, avem egalitățile:

$$(1)\quad \sphericalangle IBC = \sphericalangle BOC;\quad \sphericalangle ICB = \sphericalangle ABC;\quad \sphericalangle BIC = \sphericalangle DCB.$$

Din a doua egalitate urmează imediat că

$$(2)\quad \boxed{\overline{AB} = \overline{AC}};$$

apoi observând că: $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BCI + \sphericalangle ICD$ și că asemenea: $\sphericalangle BIC = \sphericalangle ICD + \sphericalangle IDC$, rezultă că $\sphericalangle BCI = \sphericalangle IDC$, sau încă:

$$(3)\quad \boxed{\sphericalangle IDC = \sphericalangle ABC}.$$

Pe baza proprietăților obținute până aci, dacă trapezul de prima speță este dat prin *baza mare* și *înălțimea* lui, poate să fie construit după cum urmează:

In mijlocul H al bazei mari BC ridicăm o perpendiculară pe ea $\overline{HA}$ egală cu înălțimea dată; apoi de aceeași parte cu A construim pe BC un segment de cerc capabil de unghiul ABC obținut, și prin A ducem o paralelă la BC, care taie segmentul de cerc construit în punctul D (de aceeași parte cu C față de AH). Unind punctul C cu D, avem trapezul $ABCD$.

Alte proprietăți. 1°. Considerând triunghiurile asemenea BCD și BCI, avem relația:

$$(4) \qquad \boxed{\frac{\overline{BI}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}},$$

dar AD fiind paralelă la BC, avem asemenea relațiile:

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{ID}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CA}},$$

deci relația (4) devine:

$$(5) \qquad \boxed{\frac{\overline{BD}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}},$$

sau încă subt forma:

$$(6) \qquad \boxed{\overline{BC}.\overline{CA} = \overline{BD}.\overline{CD}} \quad (\overline{CA} = \overline{AB}).$$

Această proprietate a trapezului este de altfel o aplicație a proprietății generale următoare: *Dacă două triunghiuri echivalente au un unghiu respectiv egal, produsul laturilor care cuprind unghiul egal este același pentru ambele triunghiuri.*

Proprietatea produsului laturilor se păstrează și în cazul a două triunghiuri echivalente pentru care un unghiu al unuia este suplimentul unui unghiu din cellalt triunghiu.

2°. Având $\sphericalangle BIC = \sphericalangle BCD$, segmentul $\overline{IC}$ este antiparalel cu $\overline{CD}$ în unghiul CBD, deci:

$$\boxed{\overline{BC}^2 = \overline{BI}.\overline{BD}},$$

adică **baza mare** *a trapezului de prima speță este medie geometrică între* **diagonala cea mare** *și* **segmentul** *acestei diagonale, alăturat ei.*

3°. Observând că $\sphericalangle BOD = \sphericalangle CBD = \sphericalangle ADB$, adică că $\overline{AD}$ este antiparalel la $\overline{OD}$ în unghiul DBO, deducem relația:

$$\boxed{\overline{BD}^2 = \overline{BA}.\overline{BO}}.$$

Asemenea $\overline{BD}$ fiind antiparalel la $\overline{OB}$ în unghiul BCO, avem relația:

$$\boxed{\overline{BC}^2 = \overline{CD}.\overline{CO}}.$$

Asemenea $\overline{ID}$ fiind antiparalel la $\overline{AD}$ în unghiul ACD, avem relația:

$$\boxed{\overline{CD}^2 = \overline{AC}.\overline{CI}}.$$

4°. In construcția geometrică de mai sus am presupus că *baza mare dată* și *înălțimea* dată sunt ale unui trapez ABCD, care este o soluție a problemii. Când aceste două lungimi (baza mare și înălțimea) sunt date arbitrar, urmează să examinăm în ce condițiuni problema admite o soluție. In acest scop vom calcula lungimea bazei mici $\overline{AD}$. Relația (6) dă pe următoarea

$$(7) \qquad \overline{BC}^2.\overline{CA}^2 - \overline{BD}^2.\overline{CD}^2 = 0$$

Ducând înălțimile $\overline{BB'}$ și $\overline{DD'}$ și apoi considerând triunghiurile BB'D, CD'D, AHC, avem:

$$\overline{BD}^2 = (\overline{AD} + \frac{\overline{BC}}{2})^2 + \overline{BB'}^2;$$

$$\overline{CD}^2 = (\overline{AD} - \frac{\overline{BC}}{2})^2 + \overline{DD'}^2;$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + (\frac{\overline{BC}}{2})^2,$$

sau punând $\overline{BC} = 2a$; $\overline{AH} = h$; $\overline{AD} = x$:

$$(8) \quad \overline{BD}^2 = (x+a)^2 + h^2; \quad \overline{CD}^2 = (x-a)^2 + h^2;$$
$$\overline{AC}^2 = a^2 + h^2$$

pe care introducându-le în egalitatea (7), obținem:

$$(x^2 + a^2 + h^2)^2 - 4a^2x^2 - 4a^2(a^2 + h^2) = 0,$$

sau încă:

$$(9) \qquad \boxed{x^4 - 2(a^2 - h^2)x^2 + (a^2 + h^2)(h^2 - 3a^2) = 0}.$$

Realizantul ecuației (9) fiind $4a^4 > 0$, ecuația (9) are totdeauna rădăcini reale pentru x^2; pentru ca una cel puțin din acestea să fi pozitivă trebue ca: $h^2 < 3a^2$, sau încă:

$$\boxed{h < a\sqrt{3}}.$$

Așadar, *în trapezul de prima speță,* **înălțimea** *este mai mică ca* **latura triunghiului echilateral** *înscris în cercul cu diametrul cât* **baza mare** *a trapezului.*

b. **Trapezul de a doua speță.** Triunghiul AIB este asemenea cu triunghiul BOC, latura neparalelă AB fiind omoloagă cu OB, cu care se găsește pe aceeași dreaptă; avem deci în acest caz, egalitățile:

$$(10)\quad \sphericalangle AIB = \sphericalangle BCO;\quad \sphericalangle IAB = \sphericalangle OBC;$$
$$\sphericalangle ABI = \sphericalangle BOC.$$

Având $\sphericalangle CAB = \sphericalangle IAB = \sphericalangle OBC = \sphericalangle ABC$, triunghiul ACB este isoscel, adică

$$(11)\quad \boxed{\overline{AC} = \overline{BC}},$$

deci înălțimile $\overline{AA'}$ și $\overline{BB'}$ sunt asemenea egale:

$$(12)\quad \boxed{\overline{BB'} = \overline{AA'}}.$$

Asemenea având:

$$(13)\quad \sphericalangle ABI = \sphericalangle ABD = \sphericalangle BOC = \sphericalangle BOD$$

și

$$(14)\quad \sphericalangle BAC = \sphericalangle BOC + \sphericalangle DCA;$$

$$(15)\quad \sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC,$$

rezultă că:

$$(16)\quad \sphericalangle DCA = \sphericalangle DBC = \sphericalangle BDA,$$

iar, ca urmare:

$$\Delta DAB \sim \Delta OAC,$$

de unde:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}},$$

sau

$$(17)\quad \boxed{\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OA}}},$$

Cum însă $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, avem și:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$$

și comparând cu (17), obținem relația:

$$(18)\quad \boxed{\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}}.$$

Dacă punem $\overline{AB} = b$, $\overline{OA} = x$, avem întâi: $\overline{OB} = x + b$, apoi după (18), relația:

$$x^2 = b(x + b),$$

sau:

$$(19)\quad \boxed{x^2 - bx - b^2 = 0},$$

care dă ca urmare:

$$(20)\quad \boxed{\overline{OA} = b\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}},$$

adică *punctul* O *împarte segmentul* $\overline{AB}$ *în medie și extremă rație.*

Aceste proprietăți sunt suficiente pentru a construi trapezul $ABCD$, când sunt cunoscute *baza mare* ($\overline{BC} = a$) și *înălțimea* ($\overline{AA'} = h$).

Măsurăm pe o dreaptă baza mare $\overline{BC}$ egală cu lungimea dată a; apoi descrim un cerc de centru B și rază $\overline{BB'} = h$ (înălțimea dată), iar din C ducem o tangentă pe care măsurăm $\overline{CA} = \overline{CB}$.

Unim A cu B, iar în B ridicăm perpendiculara $\overline{BL} = \frac{1}{2}BA$ pe AB și descrim cercul cu centrul în L și rază LB. Dreapta AL, prelungită dincolo de L, taie cercul (L) în punctul P. Prelungim segmentul BA cu lungimea $\overline{AO} = \overline{AP}$; apoi unind vârful O cu C, dreapta OC determină, pe paralela dusă din A la BC, al patrulea vârf al trapezului, vârful D.

Alte proprietăți. 1°. Ducem în trapez segmentul $\overline{AM}$ paralel cu $\overline{CD}$; formăm astfel paralelogramul $AMCD$, avem deci

$$(21)\quad \boxed{\overline{AM} = \overline{CD}}.$$

Observând, în plus, că:

$$(22)\quad \sphericalangle MAB = \sphericalangle COB = \sphericalangle IBA,$$

deducem că:

$$\Delta MAB = \Delta IBA,$$

deci:

$$(23)\quad \boxed{\overline{AM} = \overline{IB}}$$

și comparând (23) cu (21), urmează că:

$$(24)\quad \boxed{\overline{CD} = \overline{IB}}.$$

Dar $\sphericalangle DIC = \sphericalangle DCB$, adică $\overline{CI}$ este antiparalel la $\overline{BC}$ în unghiul BDC, deci:

(25) $$\boxed{\overline{CD}^2 = \overline{DI} \cdot \overline{DB}},$$

în care înlocuind pe $\overline{CD}$ prin egalul său $\overline{BI}$, avem:

(26) $$\boxed{\overline{BI}^2 = \overline{DB} \cdot \overline{DI}}.$$

Aşadar, *în trapezul de a doua speţă, o diagonală este egală cu baza mare şi împarte pe cealaltă în medie şi extremă raţie.*

2°. Având

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ICD = \sphericalangle DBC = \sphericalangle ADB = \sphericalangle ADI,$$

vedem că segmentul ID este antiparalel la CD în unghiul CAD, deci:

(27) $$\boxed{\overline{AD}^2 = \overline{AI} \cdot \overline{AC}}.$$

Dar din egalitatea triunghiurilor MAB şi IBA mai rezultă că $\overline{AI} = \overline{BM} = \overline{BC} - \overline{AD}$, de altă parte $\overline{AC} = \overline{BC}$, deci relaţia (27), devine:

(27′) $$\overline{AD}^2 + \overline{BC} \cdot \overline{AD} - \overline{BC}^2 = 0,$$

care dă:

(28) $$\boxed{\overline{AD} = \overline{BC} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \text{ adică:}$$

împărţind baza mare în medie şi extremă raţie, baza mică este media.

Pe baza acestei proprietăţi, putem construi trapezul de a doua speţă, când cunoaştem *baza mare* ($\overline{BC} = a$) şi *înălţimea* ($\overline{AA'} = h < a$), după cum urmează: Măsuram pe o dreaptă segmentul $\overline{BC} = a$; construim cercul T tangent în B la dreapta BC şi cu raza egală cu jumătatea lui $\overline{BC}$; fie N punctul unde segmentul CT taie cercul T. Ducem Δ paralelă la BC la o distanţă egală cu h. Cercul cu centrul în C şi rază BC taie pe Δ, de aceeaşi parte cu B, în punctul A, iar cercul cu centrul în A şi raza egală cu $\overline{CN}$ taie pe Δ, de aceeaşi parte cu C în D. Unind D cu C şi A cu B, avem trapezul ABCD.

Observare I. Calculele laturilor $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ şi a diagonalei $\overline{BC}$ sunt imediate din triunghiurile ACB, DD′B, DD′C (DD′ ⊥ BC), observând în plus că:

$$\overline{BD'} = \overline{BA'} + \overline{A'D'} = \overline{BA'} + \overline{AD}$$

şi

$$\overline{CD'} = \overline{CA'} - \overline{A'D'} = \overline{CA'} - \overline{AD}.$$

II. A doua diagonală împarte pe cea egală cu baza, în două părţi, cea adiacentă bazei mari egală cu baza mică, cea adiacentă bazei mici egală cu diferenţa bazelor.

(va urma)

FUNCŢIUNI PSEUDO-HIPERBOLICE.

STUDIU ELEMENTAR.

de

EUGEN VIŞA

(urmare)

CAP. IV.

Studiul funcţiunilor pseudo-hiperbolice. Reprezentările lor grafice.

20. Ne propunem în cele din cuprinsul acestui capitol, să desăvârşim studiul *funcţiunilor pseudo-hiperbolice* şi să construim graficele lor reprezentative. Ne vom mărgini însă şi de data aceasta numai la *sinusul* şi la *cosinusul pseudo-hiperbolic,* ceeace constitue de sigur oarecare simplificare. In schimb vom studia *două funcţiuni noui,* anume derivatele de primul ordin ale funcţiunilor de mai sus, cari sunt şi ele destul de importante, după cum vom vedea.

Studiul şi graficul funcţiunii $y = sph\, x$.

21. Funcţiunea fiind impară, va fi suficient a o studia numai pentru x pozitiv, ramura de curbă corespunzătoare valorilor negative ale variabilei, obţinându-se prin simetrie faţă de origină, din aceea corespunzătoare valorilor pozitive ale ei.

Pentru acest caz avem:

$$y' = cph\, x + sph\, x = 2\, cph\, x - 1$$
$$y'' = 2\,(cph\, x + sph\, x) = 2\,(2\, cph\, x - 1).$$

Cosinusul pseudo-hiperbolic fiind însă în continu pozitiv şi mai mare decât 1, rezultă că atât prima cât şi a doua derivată a funcţiunii $y = sph\, x$ sunt pozitive în tot intervalul dela 0 până la $+\infty$.

Curba reprezentativă a funcţiunii noastre va fi prin urmare mereu crescătoare în acest interval, având concavitatea dirijată exclusiv către y-cii pozitivi.

Tabloul rezumativ al variației funcțiunii $y = sph\, x$ pentru acest interval este:

x	0		$+\infty$
y''	2	$+ + +$	$+\infty$
y'	1	$+ + +$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

In privința graficului complect al acestei funcțiuni, el se poate construi acum destul de ușor, prezentând aspectul din fig. 3.

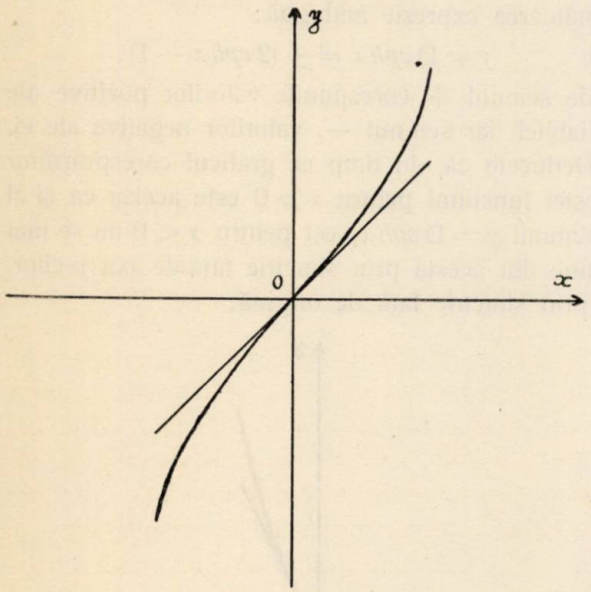


Fig. 3.

După cum se vede, acest grafic are foarte multă asemănare cu acel al funcțiunii $y = sh\, x$. Avem de notat însă că în timp ce origina este pentru graficul funcțiunii $y = sh\, x$ un punct de inflexiune propriu zisă, pentru graficul funcțiunii $y = sph\, x$, aceasta este un punct de *inflexiune artificială*, de de oarece în ultimul caz a doua derivată a funcțiunii este discontinuă pentru $x = 0$, ea trecând brusc în acest punct dela valoarea -2 la $+2$.

Studiul și graficul funcțiunii $y = cph\, x$.

22. Vom studia această funcțiune tot numai pentru x pozitiv, deoarece având de a face cu o funcțiune pară, curba ei reprezentativă este simetrică față de axa y-cilor.

Pentru acest caz avem:

$$y' = cph\, x + sph\, x = 2\, cph\, x - 1$$

$$y'' = 2\,(cph\, x + sph\, x) = 2\,(2\, cph\, x - 1),$$

adică absolut aceleași expresii pentru prima și a doua derivată ca și în cazul corespunzător al funcțiunii $y = sph\, x$. Urmează deci că și concluziile respective sunt aceleași. De altfel relația:

$$cph\, x = 1 + sph\, x$$

ne spune că pentru a obține curba reprezentativă a funcțiunii $y = cph\, x$ în intervalul $(0, +\infty)$ nu avem decât să dăm celei corespunzătoare a funcțiunii $y = sph\, x$, o translație de mărime egală cu unitatea în direcția și sensul pozitiv al axei y-cilor.

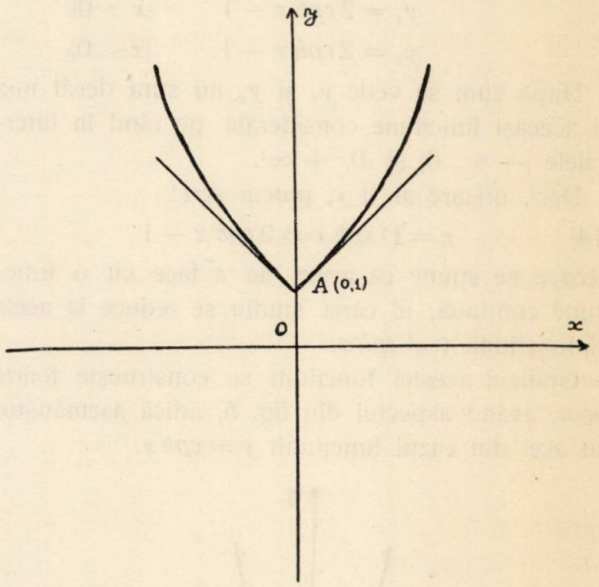


Fig. 4.

Curba complectă are aspectul din fig. 4. Relativ la această curbă, care se aseamănă întrucâtva cu aceea din cazul funcțiunii $y = ch\, x$, avem de observat că ea prezintă în A $(0, 1)$ un *punct angulos* cu două tangente de coeficienți unghiulari ∓ 1.

Acest punct, ce ar vrea să corespundă minimului funcțiunii $y = ch\, x$ pentru $x = 0$, constitue particularitatea cea mai de seamă a graficului funcțiunii $y = cph\, x$. El se datorește faptului că prima derivată a funcțiunii acesteia devine discontinuă pentru $x = 0$, trecând brusc dela valoarea -1 la $+1$.

Cât despre a doua derivată a funcțiunii $y = cph\, x$, ea are în acest punct o valoare unică, anume $+2$.

Studiul și graficul funcțiunii $y = D\, sph\, x$.

23. Ne propunem a face studiul și reprezentarea grafică a funcțiunii

$$y = \mathrm{D}\, sph\, x,$$

unde simbolul din membrul al doilea reprezintă, conform notației lui *Cauchy*, derivata sinusului *pseudo-hiperbolic* de x.

Raportându-ne la formulele (11), (Cap. III, 17), avem pentru y următoarele două expresii:

$$y_1 = cph\, x + sph\, x \qquad (x > 0)$$
$$y_2 = cph\, x - sph\, x \qquad (x < 0),$$

cari, în virtutea relațiilor (4) și (4') dela (Cap. I, 9) se mai pot scrie și sub formele:

$$y_1 = 2\, cph\, x - 1 \qquad (x > 0)$$
$$y_2 = 2\, cph\, x - 1 \qquad (x < 0).$$

După cum se vede y_1 și y_2 nu sunt decât una și aceeași funcțiune considerată pe rând în intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$.

Deci, oricare ar fi x, putem scri:

$$y = \mathrm{D}\, sph\, x = 2\, cph\, x - 1 \tag{14}$$

ceeace ne spune că avem de a face cu o funcțiune continuă, al cărei studiu se reduce la acela al funcțiunii $y = cph\, x$.

Graficul acestei funcțiuni se construește foarte ușor, având aspectul din fig. 5, adică asemănător cu acel din cazul funcțiunii $y = cph\, x$.

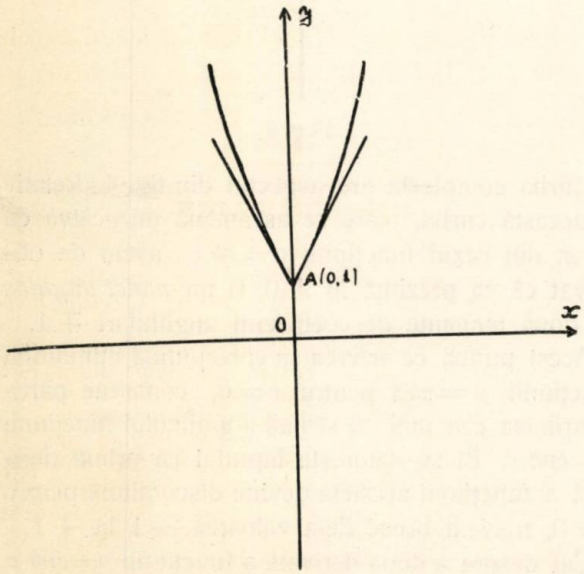


Fig. 5.

El are tot două ramuri simetrice față de axa y-cilor și un *punct angulos* în A(0, 1) cu două tangente de coeficienți unghiulari ∓ 2.

Studiul și graficul funcțiunii $y = \mathrm{D}\, cph\, x$.

24. Fie să facem acum studiul și reprezentarea grafică a funcțiunii

$$y = \mathrm{D}\, cph\, x$$

unde simbolul din membrul al doilea reprezintă, conform aceleiași notații a lui *Cauchy*, derivata cosinusului *pseudo-hyperbolic* de x.

Aplicând formulele de derivare (13) dela (Cap. III, 18) și ținând în acelaș timp seama de relațiile (4) și (4') (Cap. I, 9), găsim pentru funcțiunea noastră următoarea expresie ambiguă:

$$y = \mathrm{D}\, cph\, x = \pm\, (2\, cph\, x - 1), \tag{15}$$

unde semnul $+$ corespunde valorilor pozitive ale variabilei, iar semnul $-$, valorilor negative ale ei.

Deducem că, în timp ce graficul corespunzător acestei funcțiuni pentru $x > 0$ este acelaș ca și al funcțiunii $y = \mathrm{D}\, sph\, x$, cel pentru $x < 0$ nu se mai obține din acesta prin simetrie față de axa y-cilor, ci prin simetrie față de origină.

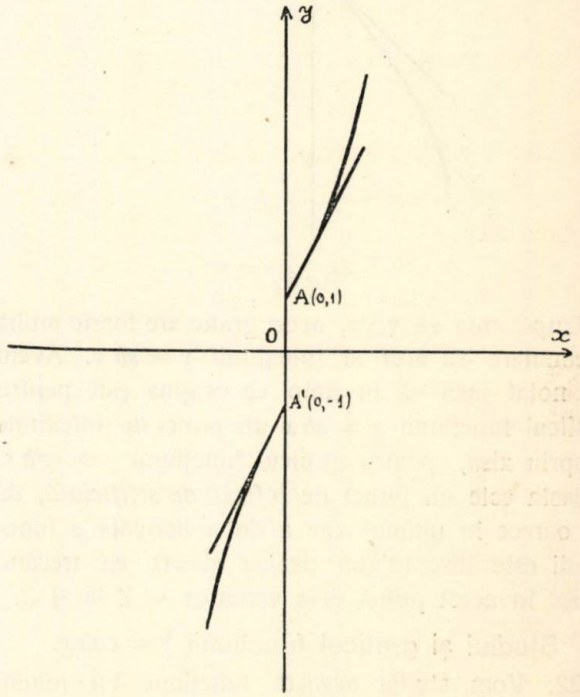


Fig. 6.

Curba complectă are aspectul din fig. 6. Particularitatea ei cea mai de seamă este, după cum se vede, discontinuitatea finită pentru $x = 0$, când funcțiunea trece brusc dela valoarea -1 la $+1$.

(va urma)

NOTE MATEMATICE

8. — *Questions d'analyse indéterminée.*

A propos de formes triquadratiques pouvant être transformées en des carrés parfaits.

Nous examinerons les trois formes:

$$x^4 + y^4 + z^4,$$
$$x^4 - y^4 - z^4,$$
$$x^4 + y^4 - z^4.$$

a. On a l'identité connue:

$$[2mn(m^2 - n^2)]^4 + [2mn(m^2 + n^2)]^4 + (m^4 - n^4)^4 = (m^8 + 14m^4n^4 + n^8)^2.$$

$m=2,\ n=1;\quad 12^4 + 15^4 + 20^4 = 481^2,\quad (481 = 13.37)$

$m=3,\ n=2;\quad 60^4 + 65^4 + 156^4 = 24961^2 = 623051521.$

L'identité précédente fournit une infinité de solutions entières de l'équation

$$x^4 + y^4 + z^4 = t^2.$$

b. On a

$$(m^2 + mn + n^2)^4 - (mn)^4 - [n(m+n)]^4 = [m(m+n)(m^2 + mn + 2n^2)]^2$$

c'est une solution à deux paramètres de

$$x^4 - y^4 - z^4 = t^2.$$

Exemples:

$$3^4 - 2^4 - 1^4 = 8^2,$$
$$7^4 - 6^4 - 2^4 = 33^2,$$
$$7^4 - 3^4 - 2^4 = 48^2,$$
$$9^4 - 8^4 - 7^4 = 8^2.$$

On a aussi

$$6^4 - 3^4 = 48^2 - 33^2$$

et

$$3^4 - 2^4 - 1^4 = 9^4 - 8^4 - 7^4 = 8^2.$$

Dans cet exemple, x, y, z et x', y', z' sont des nombres consécutifs.

c. $$7^4 + 8^4 - 4^4 = 79^2;$$
$$13^4 + 26^4 - 19^4 = 596^2.$$

Quelle est la solution générale de

$$x^4 + y^4 - z^4 = t^2\ ?$$

Connaît-on des solution où 2 des 3 nombres x, y, z, ne sont pas multiples l'un de l'autre?

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

9. — *O transformare punctuală birațională.*

In nota cu același titlu, publicată în numărul precedent la pag. 36, d-l *M. St. Botez* pune în evidență o interesantă clasă de cubice, plecând de la o relațiune simplă între coordonatele a două puncte de pe o dreaptă. Vreau să arăt că această transformare se poate obține fără considerațiunea unghiurilor, care necesită a se ține neapărat seamă de semne. Fie, pe figura de la pag. 36, $M(x, y)$ pe dreapta OM și $M'(x', y')$ pe aceiași dreaptă așa ca

$$\overline{NM} = \overline{NM'},$$

N fiind proecția lui M pe Ox. Dacă X, Y sunt coordonatele curente, atunci M′ se găsește la intersecția dreptei OM de ecuație:

(1) $$Y = \frac{y}{x} X$$

cu cercul de centru N, de rază $\overline{NM} = y$ și de ecuație

(2) $$(X - x)^2 + Y^2 = y^2.$$

Din rezolvarea sistemului (1), (2) se scoate

$$x' = \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \qquad y' = \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2},$$

care este tocmai transformarea găsită în formulele (A) din nota de la pag. 36 citată.

G-L GH. BUICLIU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLV, No. 9, Mai 1940. Două bilete în original ale lui *Le Verrier*, de *Virgil Ghițescu*. *Gheorghe Țițeica* (urmare și sfârșit), de *Gh. Th. Gheorghiu*. *Dimitrie Isopescu*, de *Ilie Popa*. Formarea câtului și restului a două polinoame când împărțitorul este descompus în factori de gradul întâi, de *Th Angheluță*. Produsul a patru numere întregi în progresie aritmetică poate fi un patrat? de *Ion B. Florescu*. Premiu „Inginer *H. Capriel*". Raport asupra premiului de algebră din 1939. Note matematice. Probleme rezolvate și propuse.

2. *Mathematica*, volumul XVI, 1940. Les mathématiques dans l'encyclopédie française, par *J. Hadamard*. Sur les polygones inscriptibles demi-semblables, par *Georges Bratu*. Propriétés asymtotiques des chaines de *Markoff* étudiées à l'aide de la fonction caractéristique, par *O. Onicescu* et *Gh. Mihoc*. Sur la représentation conforme des domaines étoilés, par *M. Biernacki*. Remarque sur l'ensemble de *Lusin*, par *E Szpilrajn*. Une remarque sur une généralisation des fonctions analytiques, par *Th. Anghelutza*. Des cercles ex-circonscrits par raport à un triangle sphérique, par *Gino Loria*. Un théorème de la théorie des équations

différentielles approchées, par *St. Golab*. Sur la convergence absolue des séries de *Fourier*, par *J. Marcinkiewicz* Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (III), par *Tiberiu Popoviciu*. Une nouvelle démonstration du théorème *d'Enneper*, par *Gheorghe Th. Gheorghiu*. Sur l'équation fonctionelle $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\varphi(y)$, par *G Van der Lyn*. Sur une application du théorème de *Mollerup*, par *Petar Muzen*. Sur les conditions de convexité d'une variété close V_{r-1} $p-1$ fois étendue de l'espace euclidien, par *Louis Pasqualini*. A propos du critère de *Sophie Germain- Furtwägler* pour le premier cas du théoréme de *Fermat*, par *M. Krasner*.

3. *Boletin Matematico*. Anul XIII, No. 3, April 1940, *Buenos-Aires*, Poesia matematică, de *B. I. Baidaff*. Asupra absciselor de convergenţă a integralelor lui *Laplace*, de *Carlos Biggeri*. Unele probleme diofantiene şi soluţionarea în teoria numerilor. Probleme propuse.

4. *Th. Anghelutză*. Sur une limite pour les modules des zéros des polynomes. (Extrait du Bulletin de la Société mathématique de France)

5. *I. Curea*. Bulletin séismique. (Préface.)

6. *Ilie I. Popa* Profesorul *Gheorghe Ţiţeica*.

7. *Ilie I. Popa*. A la recherche d'un manuscrit perdu.

8. *Ilie I. Popa*. Elementele lui *Euclid*.

9. *Ilie I Popa* Matematica în ultimul patrar de veac la Universitatea din *Iaşi*.

10. *Ilie I. Popa* Un ieşan uitat: *Dimitrie Asachi*.

11. *Ilie I. Popa*. Douăzeci şi cinci de ani de activitate a Seminarului Matematic din *Iaşi*.

12. *Ilie I. Popa*. Géométrie centro-affine des courbes gauches.

13. *Ilie I. Popa*. Géométrie projective différentielle du point conique des surfaces.

14. *Ilie I Popa*. Sur la transformation asymtotique des courbes gauches.

15. *Ilie I. Popa*. Sur quelques singularités des courbes planes.

16. *Ilie I. Popa* Sulle „tranformate asintotiche" delle curbe sghembe.

17. *Ilie I. Popa*. Sur les suites de *Laplace* périodiques.

18. *Ilie I. Popa*. Geometria proiettivo-diffe enziale delle singolarità delle curve piane.

19 *Ilie I. Popa*. Geometria proiettivo-differenziale delle singolarità: Il punto di flesso di una superficie qualunque.

20. *Ilie I. Popa* Contributo allo studio proiettivo-differenziale delle singolarità Punto di flesso e punto parabolico delle superficie.

21. *Ilie I. Popa*. Remarques sur le faisceau de M. *Gambier*.

22. *Ilie I. Popa*. Sulla geometria projettivo-differenziale delle famiglie di superficie.

23. *Ilie I. Popa*, Le modéle d'un ancien traité roumain d'arithmétique

24. *Ilie I. Popa*. Osservazioni sopra la linea parabolica di una superficie

25 *Ilie I Popa*. Sugli osculanti di una curva.

26. *Ilie I. Popa*. Titluri şi lucrări.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 542. — *Se dau două patrate concentrice* ABCD *şi* A′B′C′D′, P *un punct oarecare al cercului* ABCD *şi* P′ *un punct al cercului* A′B′C′D′. *Să se stabilească relaţia*

$$\overline{PA'^2}+\overline{PB'^2}+\overline{PC'^2}+\overline{PD'^2}=$$

$$\overline{P'A^2}+\overline{P'B^2}+\overline{P'C^2}+\overline{P'D^2}.$$

Dacă avem însă poligoane de n laturi, concentrice $A_1A_2\ldots A_n$ *şi* $A'_1A'_2\ldots A'_n$ *şi câte un punct* P *şi* P′ *pe cercurile în care ele sunt înscrise, avem*

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{PA'^2_i}=\sum_{i=1}^{n}\overline{P'A_i^2}.$$

GH GRADIN

Problema este un caz particular al următoarei teoreme a lui *Lagrange:* Dacă avem punctele fixe $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de mase $m_1, m_2, \ldots, m_n$, distanţele lor la un punct oarecare P′ şi la centrul lor de greutate g, verifică relaţiunea

$$\Sigma(m_i\overline{P'A_i^2})=\Sigma(m_i\overline{gA_i^2})+\overline{P'g^2}\,\Sigma m_i.$$

In cazul problemei 542 centrul de greutate al celor două poligoane regulate concentrice, este tocmai centrul O comun cercurilor lor circumscrise şi cum masele celor n vârfuri sunt egale, relaţia precedentă devine

$$\Sigma\overline{P'A_i^2}=\Sigma\overline{OA_i^2}+n\overline{OP'^2}.$$

Sau notând cu R, R′ razele cercurilor circumscrise celor două poligoane,

$$\Sigma\overline{P'A_i^2}=nR^2+nR'^2=n(R^2+R'^2).$$

La fel

$$\Sigma\overline{PA'^2_i}=n(R^2+R'^2),$$

care demonstrează problema în cazul general al a două poligoane de n laturi.

Pentru cazul a două patrate concentrice avem $n=4$ şi deci

$$\Sigma\overline{P'A_i^2}=\Sigma\overline{PA'^2_i}=4(R^2+R'^2).$$

Au dat o soluţie analoagă propunătorul problemei şi d-nii: *Costăchescu V. C.* şi *N. I. Manolescu* (Focşani).

Problema se rezolvă direct geometric, cu uşurinţă în cazul a două poligoane regulate de $2n$ laturi.

Observăm că într-un poligon regulat de $2n$ laturi, vârfurile A_1, A_{n+1} apoi A_2, A_{n+2}, etc. sunt diametral opuse în cercul circumscris poligonului.

Fie acum triunghiul $P' A_1 A_{n+1}$, care are un vârf în un punct oare care P' pe cercul $A_1' A_2' \ldots A_{2n}'$, iar celelalte două vârfuri, în vârfurile diametrale opuse A_1, A_{n+1} ale cercului $A_1 A_2 \ldots A_{2n}$. Raza $P'O$ a a cercului $A_1' A_2' \ldots A_{2n}'$ este mediană în triunghiul considerat $P' A_1 A_{n+1}$. Deci

$$\overline{P'A_1}^2 + \overline{P'A_{n+1}}^2 = 2\overline{P'O}^2 + 2\overline{OA_1}^2 = 2(R'^2 + R^2).$$

Scriind şi celalte n relaţiuni analoage, găsim:

$$\overline{P'A_1}^2 + \overline{P'A_2}^2 + \cdots + \overline{P'A_{2n}}^2 = 2n(R'^2 + R^2).$$

La fel

$$\overline{PA_1'}^2 + \overline{PA_2'}^2 + \cdots + \overline{PA_2'}^2 = 2n(R'^2 + R^2),$$

de unde egalitatea din enunţ.

Au întrebuinţat această cale, însă numai pentru cazul patratului d-nii: *Câlniceanu Gh. Gh*, *Ghişoiu I. P.* şi *Mihăileanu N. N.*

Celelalte soluţiuni primite conţin erori de calcul şi raţionament.

Problema 1705. — *Se cere un număr, astfel încât scriind după patratul lui plus 1, patratul lui minus 9, să se obţină factorialul lui.*

CPT. CD I. LINTES

Soluţie. Fie N numărul cerut. Conform enunţului trebue să avem $N^2 - 9 \geqq 0$, sau încă $N \geqq 3$.

Dacă n este numărul cifrelor lui $N^2 - 9$, egalitatea care defineşte pe N este următoarea:

$$(A) \qquad 10^n (N^2 + 1) + N^2 - 9 = N! \qquad (N \geqq 3).$$

De oarece 10^n şi N! deoparte sunt numere pare, iar 9 impar, trebue ca N soluţia egalităţii (A) să fie număr impar.

Observând deasemenea că pentru $N \geqq 5$, numărul $N^2 - 9$ este M 10, deducem că N este de una din formele M 10 + 3 sau M 10 − 3. Incercând pe $N = 3$, care este mai mic ca 5, vedem că egalitatea (A) nu este satisfăcută.

Primul dintre numerile $N \geqq 5$, de forma de mai sus este 7, şi $N = 7$ verifică egalitatea (A), fiindcă $N^2 - 9 = 40$, deci $n = 2$ şi relaţia (A) devine

$$10^2 . 50 + 40 = 7! = 5040,$$

deci $N = 7$ este o soluţie a problemii. Rămâne să demonstrăm că ea este singura soluţie a problemii.

In acest scop observăm că, dacă avem pentru o valoare a lui N, inegalitatea:

$$(B) \qquad (10^n + 1)(N^2 + 1) < N!$$

avem cu atât mai mult inegalitatea:

$$(10^n + 1)(N^2 + 1) < N! + 10,$$

sau subt altă formă:

$$(10^n + 1) N^2 + 10^n - 9 < N!$$

sau încă:

$$(C) \qquad 10^n (N^2 + 1) + N^2 - 9 < N!$$

In al doilea rând, dacă inegalitatea (B) are loc pentru o valoare a numărului N, ea are de asemenea loc pentru (N+1), dacă $N \geqq 11$. In adevăr, dacă numărul N^2 are n cifre, atunci $(N+1)^2$ poate avea fie n cifre fie $(n+1)$ cifre. Prin urmare pentru a demonstra a doua parte a afirmării de mai sus, este necesar să demonstrăm că având inegalitatea (B) satisfăcută, avem deasemenea

$$(D) \qquad (10^n + 1)[N+1)^2 + 1] < (N+1)!$$

în primul caz [când $(N+1)^2$ are n cifre], sau

$$(E) \qquad (10^{n+1} + 1)[(N+1)^2 + 1] < (N+1)!$$

în al doilea caz [când $(N+1)^2$ are $n+1$ cifre].

Pentru cazul inegalităţii (D), observăm că avem

$$(D_1) \quad (10^n + 1)[(N+1)^2 + 1] < (N+1).(10^n + 1)(N^2 + 1),$$

sau

$$(N+1)(N^2+1) - (N+1)^2 - 1 > 0,$$

$(N-1)N(N+1) - 1 > 0$ evidentă pentru $N \geqq 3$;

de altă parte inegalitatea (B) amplificată cu (N+1), dă

$$(D_2) \quad (N+1)(10^n + 1)(N^2 + 1) < (N+1).N!$$

şi comparând (D_1) cu (D_2), rezultă ca inegalitatea (D) are loc.

Pentru a demonstra inegalitatea (E), observăm în primul rând, că:

$$(10^{n+1}+1)[(N+1)^2 + 1] < (10^{n+1} + 1)[(N+1)^2 + 1] + 9[(N+1)^2 + 1]$$

sau încă:

$$(E_1) \quad (10^{n+1}+1)[(N+1)^2+1] < 10(10^n+1)[(N+1)^2+1].$$

Apoi, putem arăta că pentru $N > 11$, avem:

$$(E_2) \qquad 10(10^n + 1)[(N+1)^2 + 1] < (N+1)!$$

In adevăr, avem:

$10(10^n+1)[(N+1)^2+1]<(10^n+1)(N^2+1).(N+1)$,

căci:

$(N^2+1)(N+1)-10(N+1)^2-10>0$ pentru $N>11$;

sau încă

$(N+1)[N^2-10N-9]-10>0$ pentru $N>11$;

iar din (B) se deduce:

$$(10^n+1)(N^2+1)(N+1)<N!.(N+1).$$

Comparând, deci (E_1) cu (E_2), deducem că inegalitatea (E) are loc.

Aşadar, în toate cazurile pentru $N>11$, partea întâi a egalităţii (A) este mai mică de cât partea a două.

Cum primul număr de forma $M10\pm3$, care urmează după $N=7$, este $N=13$, urmează că problema nu are alte soluţii în afară de $N=7$.

Au găsit soluţia d-nii: *Borneas Marius* (lic. Arad), *Cristea I. Nicolae* (lic. Blaj), *Jidanu C-tin* (Şc. Polit, Timişoara), *Modâlcă S. Emil* (T.-Severin), *Stefănescu F. Marin* (Sub-Lt., Alba Iulia), *Tilică C. Ştefan* (Şc. Preg. de Ofiţeri) şi *Venter D-tru.*

Problema 1721. — *Să se rezolve în numere întregi sistemul:*

$$\begin{cases} x+y=u^2 \\ x^3+y^3=v^2 \end{cases}$$

A. GLODEN.

Soluţia autorului. A 2-a ecuaţie se transformă în,

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=v^2,$$

sau

$$x^2-xy+y^2=z^2. \qquad (v=uz).$$

Această ecuaţie admite soluţia

$$x=m^2-n^2,\quad y=2mn-n^2,\quad z=m^2-mn+n^2.$$

Ecuaţia intăia ne dă în urmă condiţia,

$$x+y=m^2+2mn-2n^2=u^2,$$

satisfăcută pentru:

$$m=p^2+2q^2$$
$$n=2pq+2q^2$$
$$u=p^2+2pq-2q^2.$$

Exemple numerice.

1°. $p=3,\quad q=1;\qquad m=11,\quad n=8$

$$\begin{cases} 57+112=13^2 & (=169) \\ 57^3+112^3=1261^2 & (=1590121) \end{cases}$$

2°. $p=5,\quad q=1;\qquad m=27,\quad n=12$

$$\begin{cases} 585+504=33^2 \\ 585^3+504^3=18117^2 \end{cases}$$

$$(=3^3.11.61)^2=328225689.$$

Au trimis soluţii, d-nii: *Jidanu C. I.* (Şc Polit., Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Gottbus), *Tilică C. Ştefan* (Şc. Milit de Geniu) şi *Venter D-tru.*

Problema 1730. — *Două trenuri* A *şi* B *trec unul pe lângă altul în senzuri opuse. Un călător din trenul* A, *observă că trenul* B *trece prin faţa lui în timp de 4,5 sec., totodată observă că timpul între două lovituri consecutive ce se produc la capătul şinei de 6 metri lungime este 1,08 sec.*

Lungimea trenului B *este de 100 metri. Se cer vitezele celor două trenuri.*

A. BARGLAZAN

Soluţie. Dacă trenul A parcurge 6 m. în 1,08 sec., viteza V_A este evident

$$V_A=\frac{6}{1.08}\text{ m. s}=5\tfrac{5}{9}\text{ m/s}\simeq 5{,}55\text{ m/s}.$$

Trenul B se deplasează faţă de trenul A cu viteza

$$\frac{100}{4{,}5}\text{ m/s}=22\tfrac{2}{9}\text{ m/s}\simeq 22{,}22\text{ m s}.$$

Această viteză este egală cu suma vitezelor celor două trenuri, deci viteza V_B a trenului B este

$$V_B=22\tfrac{2}{9}\text{ m/s}-5\tfrac{5}{9}\text{ m/s}=16\tfrac{1}{3}\text{ m/s}\simeq 16,17\text{ m/s}.$$

Se observă că viteza trenului B este de trei ori mai mare ca viteza trenului A.

In kilometri pe oră aceste viteze sunt:

$$V_A=\frac{5\frac{5}{9}\times 3600}{1000}=20\text{ km/oră}$$

$$V_B=\frac{22\frac{2}{9}\times 3600}{1000}=60\text{ km/oră}.$$

Soluţii date de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timişoara), *Borneas Marius, Cetăţeanu Stelian* (lic. Şincai, Bucureşti), *Cristea I. Nicolae* (lic Blaj), *Hermann I. Carol* (Blaj), *Lupescu Corneliu* (S-Lt, Roman), *Mihăileanu Andrei* (lic. Arad), *Radu G Ionel* (lic. Deva), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Şerban C. C-tin* (lic. Milit., N. Filipescu), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Spătoru Alexandru* (lic. Cluj) şi *Tătaru Alexandru.*

Problema 1743. — *Numerile* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *fiind cunoscute să se determine numerile* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *astfel ca să avem identitatea:*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cos^{2k}\alpha = \sum_{k=0}^{n} A_k \sin^{2k}\alpha,$$

oricare ar fi arcul α.

V. ALACI

Soluția d-lui profesor Eugen Vișa.

Inlocuind în identitatea dată pe $\cos^2\alpha$ prin $1 - \sin^2\alpha$, aceasta se mai poate scrie sub forma:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (1 - \sin^2\alpha)^k = \sum_{k=0}^{n} A_k \sin^{2k}\alpha$$

sau încă sub forma:

$$a_0 + a_1(1 - \sin^2\alpha) + a_2(1 - \sin^2\alpha)^2 + \cdots$$
$$\cdots + a_k(1 - \sin^2\alpha)^k + \cdots + a_n(1 - \sin^2\alpha)^n =$$
$$A_0 + A_1 \sin^2\alpha + A_2 \sin^4\alpha + \cdots + A_k \sin^{2k}\alpha + \cdots$$
$$\cdots + A_n \sin^{2n}\alpha$$

de unde, desvoltând binoamele din membrul întâi și ordonând, deducem:

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_k + \cdots + a_n) - (a_1 + 2a_2 + \cdots$$
$$\cdots + k\,a_k + \cdots + n\,a_n)\sin^2\alpha +$$
$$(a_2 + \cdots + C_k^2 a_k + \cdots C_n^2 a_n)\sin^4\alpha + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^i a_i + \cdots + C_n^i a_n)\sin^{2i}\alpha + \cdots$$
$$\cdots (-1)^n \sin^{2n}\alpha = A_0 + A_1 \sin^2\alpha + A_2 \sin^4\alpha + \cdots$$
$$\cdots + A_k \sin^{2k}\alpha + \cdots + A_n \sin^{2n}\alpha.$$

Identificând coeficienții aceloraşi puteri ale lui $\sin\alpha$ din cei doi membri ai ultimei egalități, obținem următoarele expresii ale cantităților $A_0, A_1, \ldots, A_n$ în funcție de cantitățile $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$(1)\quad \begin{cases} A_0 = (a_0 + a_1 + \cdots + a_k + \cdots + a_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k \\ A_1 = -(a_1 + 2a_2 + \cdots + k a_k + \cdots + n a) = -\sum_{k=1}^{n} k\,a_k \\ A_2 = (a_2 + \cdots + C_k^2 a_k + \cdots + C_n^2 a_n) = \sum_{k=2}^{n} C_k^2 a_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_i = (-1)^i (a_i + \cdots + C_n^i a_n) = (-1)^i \sum_{k=i}^{n} C_k^i a_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n = (-1)^n a_n. \end{cases}$$

Observații. 1°. Dacă s'ar fi dat cantitățile $A_0, A_1, \ldots, A_n$ și s'ar fi cerut determinarea cantităților $a_0, a_1, \ldots, a_n$, în mod absolut analog, am fi găsit:

$$(2)\quad \begin{cases} a_0 = (A_0 + A_1 + \cdots + A_n) = \sum_{k=0}^{n} A_k \\ a_1 = -(A_1 + 2A_2 + \cdots + kA_k + \cdots + nA_n) = -\sum_{k=1}^{n} kA_k \\ a_2 = (A_2 + \cdots + C_k^2 A_k + \cdots + C_n^2 A_n = \sum_{k=2}^{n} C_k^2 A_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_i = (-1)^i (A_i + \cdots + C_n^i A_n) = (-1)^i \sum_{k=i}^{n} C_k^i A_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n = (-1)^n A_n. \end{cases}$$

Rezultă de aici că dacă se consideră una oarecare din grupele de relații (1) sau (2) ca un sistem linear de ecuații în raport cu cantitățile din membrii ai doilea, soluțiile sistemului astfel considerat sunt date de relațiile din celaltă grupă.

Comparând acest rezultat cu acela pe care l-am obține prin rezolvarea sistemului (1) de exemplu după formulele lui *Crammer*, conchidem următoarea propoziție:

Dacă în determinantul de ordinul $n+1$*:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

care are toate elementele de sub diagonala principală nule, înlocuim elementele coloanei de rangul i *respectiv prin cantitățile*

$$A_0, \; -A_1, \; A_2, \ldots, \; (-1)^i A_i, \ldots, \; (-1)^n A_n,$$

valoarea noului determinant astfel obținut este egală cu $(-1)^i \sum_{k=i}^{n} C_k^i A_k$.

Rezultatul acesta s'ar putea obține de altfel și direct — deși ceva mai greu — desvoltând deter-

minantul în chestiune după elementele coloanei de rangul i.

2°. O problemă absolut analoagă cu cea dată s'ar putea pune şi pentru cazul funcţiunilor hiperbolice $ch\,\alpha$ şi $sh\,\alpha$.

Rezultatele, tot atât de simple şi în acest caz, nu ar fi însă întocmai şi la fel de interesante, din cauză că relaţia:

$$ch^2\,\alpha - sh^2\,\alpha = 1,$$

care corespunde relaţiei:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

din cazul funcţiunilor circulare, nu prezintă simetria acesteia din urmă.

Au mai trimis soluţii, d-nii: *Jidanu C-tin* (Şc. Polit, Timişoara). *Mahrenholz Johannes* (Gottbus) şi *Stamate I. Ionel* (student, Cluj).

PROBLEME PROPUSE

1850. — O persoană schimbă o sumă de bani în monede de câte 1, 2, 5, 10, 20 şi 50 lei. Ea primeşte un număr egal, respectiv, de monede de 1 şi 2 lei, 10 şi 20 lei şi 5 şi 50 lei.

Monedele de 20 lei reprezintă o sumă egală cu suma reprezentată de monedele de 5 lei şi 1 leu.

Monedele de 2 lei reprezintă o sumă egală cu suma reprezentată de monedele de 10 lei şi 50 lei la un loc.

Să se afle câte monede de fiecare fel are acea persoană.

C-TIN I. JIDANU

1851. — Să se arate că dacă una din ecuaţiile

$$x^2 + (2q - p^2)\,x + q^2 = 0$$
$$x^2 + (p^3 - 3pq)\,x + q^3 = 0.$$
$$x^2 + (4p^2q - 2q^2 - p^4)\,x + q^4 = 0$$

are rădăcini reale şi distincte, atunci şi celelalte două au rădăcini reale şi distincte.

ION MARGINEANU

1852. — Să se găsească o soluţie cu trei parametri a sistemului:

$$\begin{cases} x^2 + a\,x\,y = u^3 \\ x^2 + b\,x\,z = v^3. \end{cases}$$

A. GLODEN

1853. — Se dau în plan cercurile C_1, C_2 şi dreapta Δ. Se cere locul punctelor M ale căror polare faţă de cele două cercuri, se întâlnesc pe Δ.

G-L GH. BUICLIU

1854, — In raport cu două axe rectangulare se consideră punctele:

$$A\,(\lambda, 0);\quad B\,(0, 2\lambda);\quad C\,(3\lambda, 0).$$

Se cere:

1. Să se scrie ecuaţia cercului (Γ) circumscris triunghiului A B C.

2. Locul geometric al centrului cercului (Γ) când λ variază.

3. Locul punctelor de contact al tangentelor la cercul (Γ) paralele cu dreapta B C, când λ variază, este format din două drepte ale căror ecuaţii se cer.

4. Intre suprafeţele S şi Σ ale triunghiului A B C şi triunghiului format de tangentele la cercul (Γ) în A, B, C, există o relaţie de forma

$$\Sigma = k\,S,$$

k fiind o constantă. Să se determine această constantă.

GH. TH. GHEORGHIU

1855. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} a^2\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) - b^2\,\dfrac{\sin y}{1 + \cos y} = c^2 \\ a\sqrt[4]{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} - b\sqrt[4]{\dfrac{1 - \cos y}{1 + \cos y}} = d. \end{cases}$$

IONEL I. STAMATE

1856. — Să se stabilească relaţia:

$$(2\cos^2 B + \cos 2B)^2 \sin^2 B +$$
$$(2\cos^2 B - 3\cos 2B)^2 \sin^2 C = 1,$$

ştiind că unghiurile B şi C sunt complimentare.

CORNELIU N. POPESCU

1857. — Se cere reprezentarea parametrică a unui dreptunghiu, căruia i-se cunosc două vârfuri şi lungimea unei laturi.

Aceiaşi problemă, înlocuind dreptunghiul cu un romb, sau un patrat.

V. ALACI

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait a Buenos Aires et dont les collaborations se publient en Allemand, Anglais, Espagnol Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 286 articles, 249 notes et 1892 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIII, s'a primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Prof. Ion Rizescu.* Str. Mihăileanu 18, Constanţa.
2. *Prof. Constantin Borş.* Str. Petru Raieş 85, Piatra Neamţ.
3. D-l *Marin I. Popa,* Licenţiat în Matematici. Bulevardul Alexandru I. Cuza 20, Bucureşti II.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XIX, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care ev tual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

A apărut volumul:

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ

de

VALERIU ALACI

Profesor, Şcoala Politechnică, Timişoara.

272 pagini — Preţul: 180 Lei.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XIX, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

ANUL XX. IULIE 1940 No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **O. N. TINO**: O CLASA INTERESANTA DE TRAPEZE.
2. **EUGEN VISA**: FUNCTIUNI PSEUDO-HIPERBOLICE. STUDIU ELEMENTAR.
3. NOTE MATEMATICE: 10, 11.
4. BIBLIOGRAFIE
5. PROBLEME REZOLVATE: 313, 1736, 1738, 1745, 1746.
6. PROBLEME PROPUSE: 1858-1865.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebuie să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile, din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ȚIȚEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ștefan Nadașan** (Laboratorul de Rezistența Materialelor), Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii și cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN, Școala Politechnică, Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este pentru anul XX, de 200 (două sute) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIX inclusiv, broșate, 120 lei fiecare.

ANUL XX — No. 5 TIMISOARA, IULIE 1940

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

O CLASĂ INTERESANTĂ DE TRAPEZE

DE O. N. ȚINO

(urmare)

c. **Trapezul de a treia speță.** Triunghiul AIB asemenea cu triunghiul BOC, latura neparalelă AB fiind omoloagă cu latura OC.

Avem prin ipoteză:

$$(29)\qquad \sphericalangle AIB = \sphericalangle OBC;\quad \sphericalangle BAI = \sphericalangle OCB;\quad \sphericalangle ABI = \sphericalangle BOC.$$

Din ultima deducem:

$$\sphericalangle ABI = \sphericalangle OBD = \sphericalangle BOD,$$

adică, că triunghiul BDO este isoscel, deci că

$$(30)\qquad \boxed{\overline{BD} = \overline{OD}}.$$

Având $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCO$, rezultă încă că:

$$(31)\qquad \sphericalangle BCA = \sphericalangle BOC = \sphericalangle ABI.$$

Segmentul AC fiind antiparalel la $\overline{CO}$ în unghiul OBC, avem:

$$(32)\qquad \boxed{\overline{BC}^2 = \overline{AB}.\overline{OB}},$$

adică: *baza mare a trapezului de a treia speță este medie geometrică între latura neparalelă considerată și latura triunghiului mare obținută prin prelungirea ei.*

2°. Asemenea, segmentul BI fiind antiparalel cu $\overline{CB}$ în unghiul BAC, avem relația:

$$(33)\qquad \boxed{\overline{AB}^2 = \overline{AI}.\overline{AC}},$$

adică: *latura neparalelă considerată este medie geometrică între prima diagonală (adiacentă ei și bazei mici) și segmentul acestei diagonale alăturat ei.*

3. Observând, că segmentul AI este antiparalel la $\overline{BA}$ în unghiul ADB, avem relația:

$$(34)\qquad \boxed{\overline{AD}^2 = \overline{DI}.\overline{DB}},$$

adică: *baza mică a trapezului de a treia speță este medie geometrică între a doua diagonală (adiacentă laturei neparalele considerate și bazei mari) și segmentul acestei diagonale alăturat ei.*

4°. Să ducem acum segmentul AM paralel cu latura CD și limitat la baza mare BC. Patrulaterul AMCD este paralelogram, deci

$$\overline{AM} = \overline{BC} \text{ și } (35)\ \overline{BM} = \overline{BC} - \overline{MC} = \overline{BC} - \overline{AD}.$$

Dar $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BOC = \sphericalangle ACB$, deci $\overline{AM}$ fiind antiparalel la $\overline{CA}$ în unghiul ABC, avem relația:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BM}.\overline{BC},$$

sau încă:

$$(36)\qquad \boxed{\overline{AB}^2 = \overline{BC}(\overline{BC} - \overline{AD})},$$

adică: *latura neparalelă considerată este medie geometrică între baza mare și diferența celor două baze ale trapezului.*

5°. Să ducem acum $\overline{BE}$ paralel cu $\overline{CA}$ și limitat la dreapta DA.

Avem:

$$\sphericalangle EBA = \sphericalangle BAC \text{ și } \sphericalangle ABD = \sphericalangle CAD,$$

deci:

$$\sphericalangle EBD = \sphericalangle DAB.$$

Segmentul AB fiind antiparalel la $\overline{BE}$ în unghiul EDB, avem relația:

$$\overline{BD}^2 = \overline{DA}.\overline{DE},$$

dar $\overline{AE} = \overline{BC}$, deci $\overline{DE} = \overline{BC} + \overline{AD}$, de care ținând seamă, relația precedentă, devine:

(37) $$\boxed{\overline{BD}^2 = \overline{AD}(\overline{BC} + \overline{AD})},$$

adică, *diagonala a doua a trapezului de a treia speță este medie geometrică între baza mică și suma celor două baze ale trapezului.*

6°. Observând că $\overline{AD}$ este paralelă la $\overline{BC}$, avem proporția:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \quad *^*_* \quad \frac{\overline{OD}}{\overline{OC} - \overline{OD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC} - \overline{AD}},$$

sau

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC} - \overline{AD}}$$

și ținând seama de relația (30), deducem:

(38) $$\boxed{\frac{\overline{AD}}{\overline{BC} - \overline{AD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}},$$

adică, **a doua latură neparalelă** *a trapezului de a treia speță este a patra proporțională între* **baza mică, diferența celor două baze** *și* **diagonala a doua.**

7°. Din asemănarea triunghiurilor BCO și BCA avem relația

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CA}},$$

dar

$$\overline{OC} = \overline{OD} + \overline{DC} = \overline{BD} + \overline{DC}$$

și ca urmare relația devine:

(39) $$\boxed{\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD} + \overline{DC}}{\overline{AC}}},$$

adică: *prima diagonala a trapezului de speța a treia este a patra proporțională între* **baza mare, latura neparalelă considerată** *și* **suma dintre a doua diagonală** *și* **a doua latură neparalelă.**

8°. Aplicând acum triunghiurilor echivalente BAC și BDC teorema (amintită mai sus) cu privire la triunghiuri echivalente, care au un unghiu respectiv egal, avem relația:

(40) $$\boxed{\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{BC} \cdot \overline{CD}}.$$

Aplicând aceeași teoremă triunghiurilor echivalente ABD și ACD ($\sphericalangle ABD = \sphericalangle CAD$), avem relația analoagă:

(40′) $$\boxed{\overline{AB} \cdot \overline{BD} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}}.$$

Observare. Făcând produsul relațiilor (40) și (40′) și ținând seamă de relația (36), regăsim relația (38).

Relațiile (36), (37), (38) sunt suficiente ca să putem construi trapezul de a treia speță, când ne-ar fi date numai bazele lui, prin construcții grafice cu totul elementare. Să presupunem însă, ca în cazurile precedente, că datele sunt baza mare $\overline{BC} = a$ și înălțimea $\overline{AA'} = h$ a trepezului. Însemnăm lungimea bazei mici cu z, adică $\overline{AD} = z$, iar proiecțiile segmentelor AB și BD pe AD cu x și y, adică $\overline{AB'} = x$, $\overline{B'D} = y$. Avem în primul rând relațiile:

$$x^2 = \overline{AB}^2 - h^2; \quad y^2 = \overline{BD}^2 - h^2; \quad x + y = z;$$

dar

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}(\overline{BC} - \overline{AD}) = a(a - z);$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}(\overline{AD} + \overline{BC}) = z(a + z),$$

deci sistemul precedent devine:

(41) $$x^2 = a(a - z) - h^2; \quad y^2 = z(a + z) - h^2,$$

$$x + y = z,$$

din care deducem prin transformări succesive și eliminând pe y, sistemul echivalent:

(42) $$x = \frac{a^2 - 2az}{2z}, \quad x^2 = a(a - z) - h^2,$$

din care prin eliminarea lui x obținem ecuația, care dă pe z, anume:

(43) $$\psi(z) \equiv 4az^3 + 4h^2z^2 - 4a^3z + a^4 = 0.$$

Punând acum $\frac{h}{a} = k$ și $\frac{z}{a} = u$, ecuația (43) devine:

(44) $$\boxed{\varphi(u) \equiv 4u^3 + 4k^2u^2 - 4u + 1 = 0}.$$

Pentru ca ecuația $\varphi(u)$ să aibă rădăcini pozitive, observând că $\varphi'(u) \equiv 4(3u^2 + 2k^2u - 1) = 0$ are totdeauna o rădăcină pozitivă u_1 și că $\varphi(0) > 0$, $\varphi(+1) > 0$, trebue să avem:

$$\varphi(u_1) \equiv \frac{1}{27}[27 + 20k^2 - 8(k^4 + 3)^{\frac{3}{2}}] \leq 0,$$

sau

(45) $f(k^2) \equiv 64(k^4+3)^3 - (27+20k^2)^2 \geqq 0,$

căci avem:

$$1 - u_1 = \frac{(3+k^2) - \sqrt{k^4+3}}{3} =$$

$$\frac{(3+k^2)^2 - (k^4+3)}{3[3+k^2+\sqrt{k^4+3}]} = \frac{6(k^2+1)}{3[3+k^2+\sqrt{k^4+3}]} > 0.$$

Desvoltând pe $f(k^2)$ după puterile lui k^2, avem inecuația:

(45′) $f(k^2) \equiv 64k^{12} + 576k^8 + 1328k^5 - 1080k^2 - 729 \geqq 0.$

Polinomul $f(k^2)$ prezintă o singură variație, deci ecuația în k^2 are o singură rădăcină pozitivă, și cum $f(0) < 0$ și $f(+1) > 0$ această rădăcină este cuprinsă în intervalul $(0, +1)$. Insemnând cu k_1^2 această rădăcină, urmează că trebue să luăm pe $k^2 \geqq k_1^2$ pentru ca problema să fie posibilă. Ecuația în u are în cazul general posibil două rădăcini pozitive cuprinse în intervalele $(0, u_1)$ și $(u_1, 1)$.

d. **Trapezul de a patra speță.** Triunghiul AIB asemenea cu triunghiul BOC, latura neparalelă AB fiind omoloagă cu baza mare BC. Avem deci prin definiție

(46) $$\sphericalangle AIB = \sphericalangle BOC;$$

având $\sphericalangle ABI < \sphericalangle ABC$, avem din asemănare încă:

(47) $\sphericalangle ABI = \sphericalangle BCO$ și $\sphericalangle BAI = \sphericalangle ABC.$

Din ultima relație rezultă:

$$\sphericalangle CAB = CBA,$$

deci că

(48) $$\boxed{\overline{AC} = \overline{BC}}.$$

Patrulaterul $OAID$ fiind inscriptibil într'un cerc

$$(\sphericalangle AOD + \sphericalangle AID = 180^0),$$

rezultă că

$$\sphericalangle BDO = \sphericalangle ABC = 180^0 - \sphericalangle OAC.$$

1°. Observând deci că $\overline{BD}$ este antiparalel la $\overline{BC}$ în unghiul BOC, avem relația:

(49) $$\boxed{\overline{OB}^2 = \overline{OD} \cdot \overline{OC}},$$

însă AD fiind paralelă la BC, avem deasemenea relațiile:

(50) $$\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$$ și (51) $$\boxed{\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}}.$$

Inmulțind (49) cu (50), avem:

(52) $$\frac{\overline{OB}^2}{\overline{OC}^2} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$$

și comparând (52) cu (51), avem relația interesantă următoare:

(53) $$\boxed{\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}},$$

adică: *în trapezul de a patra speță pătratul raportului laturilor neparalele este egal cu raportul celor două baze.*

2°. Triunghiurile OAC și ODB au unghiul BOC comun, iar unghiurile OAC, ODB suplementare, deci rotind triunghiul OAC în jurul lui O până ce OA se așterne pe dreapta OC, latura AC se așează paralelă la BD; ca urmare putem aplica teorema generalizată a teoremii bisectoarei unui triunghiu și avem:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}$$

și folosind relația (51), obținem:

(54) $$\boxed{\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}},$$

adică, *în trapezele de speța a patra raportul diagonalelor este egal cu raportul laturilor neparalele.*

3°. Comparând relațiile (53) și (54), deducem relația:

(55) $$\boxed{\frac{\overline{BD}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}},$$

pe care o putem încă transforma, observând că $\overline{AC} = \overline{BC}$, în următoarea relație foarte interesantă:

(56) $$\boxed{\overline{BD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BC}}.$$

Așadar, *în trapezul de a patra speță una din diagonale este egală cu* **baza mare,** *iar cealaltă este medie geometrică a celor două baze ale trapezului.*

4°. Considerând triunghiurile BAD şi BCO, observăm că

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle BCO \text{ şi } \sphericalangle BAD + \sphericalangle OBC = 180^0,$$

deci acestor triunghiuri li se aplică teorema generalizată a bisectoarei unui triunghiu şi avem ca urmare relaţia:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}$$

şi ţinând seamă de (51), avem:

$$\boxed{\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}}, \tag{57}$$

sau încă subt forma:

$$\boxed{\overline{AD}\cdot\overline{CD} = \overline{AB}\cdot\overline{BD}}. \tag{58}$$

Observări. Relaţia (58) rezultă şi direct din triunghiurile echivalente ACD şi ABD, observând că

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADO = 180^0 - \sphericalangle ADC$$

şi aplicând proprietatea generală că *produsul laturilor, care formează în două triunghiuri echivalente unghiuri respectiv suplementare este acelaşi.*

Relatia (58) poate fi încă obţinută drept consecinţă a produsului relaţiilor (53) şi (54); aşa că este compatibilă cu celelalte.

5°. Presupunând acum că sunt date cunoscute baza mare, $\overline{BC}=a$ şi înălţimea trapezului, $\overline{AA'}=h$, să examinăm, dacă putem construi trapezul de a patra speţă, ale cărui proprietăţi le-am văzut mai sus. Să însemnăm în acest scop lungimea bazei mici cu x, adică $\overline{AD}=x$. Relaţia (56) dă imediat egalitatea $\overline{BD} = \sqrt{a\,x}$. Observăm în plus că avem:

$$\overline{AC} = a;\ \overline{CA'} = \sqrt{a^2 - h^2};$$

$$\overline{BA'} = \overline{BC} - \overline{A'C} = a - \sqrt{a^2 - h^2},$$

iar

$$\overline{AB}^2 = 2\,a\,(a - \sqrt{a^2 - h^2}).$$

Pentru determinarea lui x, calculăm pe $\overline{CD}$ din triunghiul BDC şi din triunghiul dreptunghiu $CD'D$. Avem:

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 - 2\,\overline{BC}\cdot\overline{BD'},$$

dar

$$\overline{BD'} = \overline{BA'} + \overline{A'D'} = \overline{BA'} + \overline{AD} = x + a - \sqrt{a^2 - h^2},$$

deci

$$\overline{CD}^2 = 2\,a\,\sqrt{a^2 - h^2} - a^2 - a\,x, \tag{59}$$

apoi, observând că:

$$\overline{CD'} = \overline{CA'} - \overline{A'D'} = \overline{CA'} - \overline{AD} = \sqrt{a^2 - h^2} - x,$$

avem:

$$\overline{CD}^2 = h^2 + (\sqrt{a^2 - h^2} - x)^2 = x^2 + a^2 - 2\,x\,\sqrt{a^2 - h^2}. \tag{59'}$$

Egalând cele două valori ale lui $\overline{CD}^2$, obţinem ecuaţia:

$$\boxed{x^2 + (a - 2\sqrt{a^2 - h^2})\,x + 2a\,(a - \sqrt{a^2 - h^2}) = 0}. \tag{60}$$

Observând că ecuaţia este omogenă în raport cu cele trei lungimi: x, a, h, vom pune pentru înlesnire:

$$\frac{x}{a} = z \quad \text{şi} \quad \frac{h}{a} = k,$$

după care ecuaţia (60) se transformă în următoarea:

$$z^2 - (2\sqrt{1 - k^2} - 1)\,z + 2\,(1 - \sqrt{1 - k^2}) = 0. \tag{61}$$

Formând realizantul ecuaţiei, avem:

$$R \equiv (2\sqrt{1 - k^2} - 1)^2 - 8\,(1 - \sqrt{1 - k^2})$$

$$= -(3 + 4\,k^2) + 4\sqrt{1 - k^2} = \frac{7 - 40\,k^2 - 16\,k^4}{4\sqrt{1 - k^2} + (3 + 4\,k^2)}.$$

Ca urmare, pentru ca rădăcinile să fie reale, este necesar să avem:

$$7 - 40\,k^2 - 16\,k^4 \geqq 0,$$

sau încă:

$$16\,k^4 + 40\,k^2 - 7 \leqq 0. \tag{62}$$

Rădăcinile trinomului în k^2 fiind reale şi de semne contrarii, iar coeficientul primului termen pozitiv, pentru ca să avem condiţia (62) îndeplinită, este necesar să luăm pe k^2 cuprins între 0 şi rădăcina pozitivă k_1^2 a trinomului, anume:

$$k_1^2 = \frac{-5 + 4\sqrt{2}}{4}. \tag{63}$$

Acum, pentru ca z să fie pozitiv, rădăcinile reale ale ecuaţiei (61) fiind de acelaşi semn, trebue de asemeni să avem:

$$2\sqrt{1-k^2}-1>0, \quad \text{sau:} \quad k^2<\frac{3}{4},$$

dar observând că:

$$\frac{3}{4}-\frac{-5+4\sqrt{2}}{4}=\frac{8-4\sqrt{2}}{4}>0,$$

condiția (62) atrage de la sine condiția (63).

FUNCȚIUNI PSEUDO-HIPERBOLICE.

STUDIU ELEMENTAR.

de

EUGEN VIȘA

(urmare)

CAP. V.

Funcțiunile pseudo-hiperbolice inverse.

25. Vom face în acest ultim capitol al studiului nostru, câteva considerațiuni asupra *funcțiunilor pseudo-hiperbolice inverse,* înțelegând prin acestea argumentele ce corespund unor funcțiuni pseudo-hiperbolice date.

Pentru respectarea punctului de vedere adoptat, ne vom mărgini însă numai la funcțiunile inverse *sinusului* și *cosinusului pseudo-hiperbolic.*

Vom exprima aceste două funcțiuni inverse prin notațiile:

$$y=\arg sph\, x \quad \text{și} \quad z=\arg cph\, x,$$

cari se citesc respectiv: *y este argumentul al cărui sinus pseudo-hiperbolic este x și z este argumentul al cărui cosinus pseudo-hiperbolic este x.*

Funcțiunea $y=\arg sph\, x$.

26. Din studiul *sinusului pseudo-hiperbolic* se deduce cu ușurință că pentru o valoare dată a lui, corespunde o singură valoare pentru argument, ceeace se exprimă spunând că funcțiunea

(16) $$y=\arg sph\, x$$

este *uniformă.* Mai mult încă: se constată că această funcțiune este *definită* pentru toate valorile reale ale variabilei. Ea are același semn ca și variabila și satisface relației:

(17) $$\arg sph(-x)=-\arg sph\, x,$$

adică este o *funcțiune impară.*

27. **Teoremă.** *Funcțiunea $y=\arg sph\, x$ se poate exprima cu ajutorul funcțiunii logaritmice neperiene respectiv prin relațiile:*

(18)
$$\boxed{\begin{array}{l}\arg sph\, x=\log\sqrt{1+2x}, \quad (x>0)\\ \arg sph\, x=-\log\sqrt{1-2x}, \quad (x<0)\end{array}}.$$

Demonstrare. Inversând relația de definiție (16), avem:

$$x=sph\, y=\begin{cases}\dfrac{th\, y}{1-th\, y}, & (x>0)\\ \dfrac{th\, y}{1+th\, y}, & (x<0)\end{cases}$$

și ținând seama că:

$$th\, y=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1},$$

vom putea scrie:

$$x=\begin{cases}\dfrac{e^{2y}-1}{2}, & (x>0)\\ \dfrac{e^{2y}-1}{2e^{2y}}, & (x<0).\end{cases}$$

Din ultimele relații deducem:

$$\begin{cases}e^{2y}=1+2x, & (x>0)\\ e^{2y}=\dfrac{1}{1-2x}, & (x<0)\end{cases}$$

de unde, extrăgând rădăcina patrată și având în vedere că funcțiunea exponențială este esențial pozitivă, obținem:

$$\begin{cases}e^{y}=\sqrt{1+2x}, & (x>0)\\ e^{y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}, & (x<0).\end{cases}$$

Aplicând acum acestor relații din urmă logaritmii neperieni, vom avea:

$$\begin{cases}y=\log\sqrt{1+2x}, & (x>0)\\ y=-\log\sqrt{1-2x}, & (x<0)\end{cases}$$

adică, în baza notației (16), chiar relațiile (18), cari, în felul acesta sunt stabilite.

Derivata funcțiunii $y=\arg sph\, x$.

28. Derivând relațiile (18) de mai sus, găsim că derivata funcțiunii $y=\arg sph\, x$ se exprimă respectiv prin formulele:

$$(19)\qquad \boxed{\begin{aligned}(\operatorname{arg}\,sph\,x)' &= \frac{1}{1+2x}, \quad (x>0)\\ \operatorname{arg}\,sph\,x)' &= \frac{1}{1-2x}, \quad (x<0)\end{aligned}}\ .$$

Evident, mai putem ajunge la aceste formule, înversând relația (16) și derivând-o apoi în raport cu x.

Graficul funcțiunii $y = \operatorname{arg}\,sph\,x$.

29. Având graficul funcțiunii $y = sph\,x$ (fig. 3), conform unor rezultate teoretice cunoscute, acela al funcțiunii $y = \operatorname{arg}\,sph\,x$ se obține luând simetricul celui precedent față de prima bisectoare.

Acesta prezintă aspectul din fig. 7.

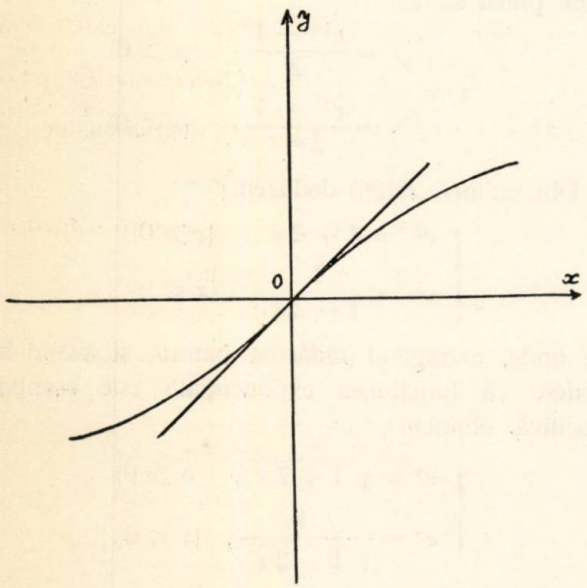


Fig. 7.

Funcțiunea $y = \operatorname{arg}\,cph\,x$.

30. Raportându-ne la studiul *cosinusului pseudo-hiperbolic*, deducem că la o valoare dată a lui corespund pentru argument două valori egale și de semne contrari. Faptul acesta ne spune că funcțiunea:

$$(20)\qquad y = \operatorname{arg}\,cph\,x$$

este *multiformă*, având două determinații, una pozitivă și alta negativă. Vom considera prima din aceste determinații ca *principală*, iar a doua ca *secundară*.

Notând determinația principală a funcțiunii $y = \operatorname{arg}\,cph\,x$, prin simbolul $\operatorname{Arg}\,cph\,x$, deducem că relația ei de definiție (20) este echivalentă cu următoarea relație ambiguă:

$$(21)\qquad y = \pm \operatorname{Arg}\,cph\,x.$$

Intrucât *cosinusul pseudo-hiperbolic* variază numai între 1 și $+\infty$, este dela sine înțeles că cele două determinații ale funcțiunii (20) nu au o existență propriu zisă, adică nu sunt *definite*, decât pentru $x \geqq 1$.

31. Teoremă. *Determinația principală a funcțiunii $y = \operatorname{arg}\,cph\,x$ se poate exprima cu ajutorul funcțiunii logaritmice neperiene prin relația:*

$$(22)\qquad \boxed{\operatorname{Arg}\,cph\,x = \log\sqrt{2x-1}}\ .$$

Demonstrare. Inversând relația

$$(23)\qquad y = \operatorname{Arg}\,cph\,x,$$

putem scrie:

$$x = cph\,y$$

și cum y este pozitiv, deducem:

$$x = \frac{1}{1-th\,y} = \frac{e^{2y}+1}{2}$$

de unde, mai departe, avem:

$$e^{y} = \sqrt{2x-1}$$

radicalul considerându-se aritmetic.

Aplicând ultimei relații logaritmii neperieni, deducem:

$$y = \log\sqrt{2x-1},$$

adică, în virtutea notației (23), chiar relația (22), care, în felul acesta este și ea stabilită.

Derivata funcțiunii $y = \operatorname{arg}\,cph\,x$.

32. Derivând relația (22) de mai sus, deducem că derivata determinației principale a funcțiunii $y = \operatorname{arg}\,cph\,x$ se exprimă cu ajutorul formulei:

$$(24)\qquad \boxed{(\operatorname{Arg}\,cph\,x)' = \frac{1}{2x-1}}\ .$$

și care evident se mai poate stabili inversând relația de definiție (23) și derivând apoi cei doi membri în raport cu x.

Graficul funcţiunii $y = \arg cph\, x$.

33. Graficul celor două determinaţii ale funcţiunii $y = \arg cph\, x$ se obţine şi el destul de uşor, luând anume simetricul faţă de prima bisectoare a funcţiunii $y = cph\, x$. El prezintă aspectul din fig. 8.

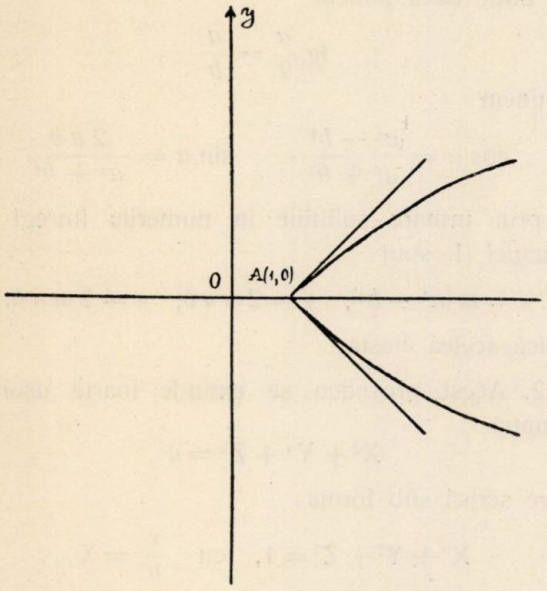


Fig. 8.

Incheiere

Prezentând acest prim studiu, de altfel destul de sumar, asupra *funcţiunilor pseudo-hiperbolice,* cred că voiu fi putut aduce o contribuţie cât de modestă, care să se însumeze, cel puţin indirect, celor expuse de D-l Profesor *Alaci* în lucrarea D-sale deosebit de preţioasă: *„Trigonometria patratică“*.

In ceeace priveşte aplicaţiile diverse pe cari le au funcţiunile pseudo-hiperbolice, voiu căuta ca, cel puţin unele dintre ele, să le prezint cât mai curând.

In această ordine de idei, ţin să precizez că studiul relativ la coordonatele hiperbolice, pe care l-am publicat anterior în cuprinsul acestei reviste (Vol. XIX, pag. 160), ar vrea să fie chiar preliminarul unor astfel de aplicaţii.

NOTE MATEMATICE

10. — *Résolution en nombres entiers du système*

$$x^2 + a\,x\,y + y^2 = z^2 + a\,z\,t + t^2 = w^2,$$

a étant un nombre donné.

Partons de l'identité

$$(m\,p - n\,q)^2 + a\,(m\,p - n\,q)\,(n\,p + m\,q + a\,n\,q) + (n\,p + m\,q + a\,n\,q)^2 =$$
$$(m\,q - n\,p)^2 + a\,(m\,q - n\,p)\,(n\,q + m\,p + a\,n\,p) + (n\,q + m\,p + a\,n\,p)^2,$$

qui fournit une solution, exprimée à l'aide de 4 paramètres arbitraires m, n, p et q de l'équation

$$x^2 + a\,x\,y + y^2 = z^2 + a\,z\,t + t^2.$$

En annulant l'expression $m\,q - n\,p$ et en remplaçant q par $\frac{n\,p}{m}$, on obtient facilement la solution générale suivante de l'équation diophantienne

$$x^2 + a\,x\,y + y^2 = w^2$$

$x = m^2 - n^2$, $y = 2\,m\,n + a\,n^2$, $w = m^2 + a\,m\,n + n^2$,

m et n étant des entiers arbitraires.

Pour résoudre le système

$$x^2 + a\,x\,y + y^2 = z^2 + a\,z\,t + t^2 = w^2,$$

on peut poser

$$x = m^2 - n^2, \qquad y = 2\,m\,n + a\,n^2,$$
$$z = p^2 - q^2, \qquad t = 2\,p\,q + a\,q^2,$$
$$w = m^2 + a\,m\,n + n^2 = p^2 + a\,p\,q + q^2.$$

La dernière équation est satisfaite si l'on prend

$$m = r\,r' - s\,s', \qquad n = r'\,s + r\,s' + a\,s\,s'$$
$$p = r\,s' - r'\,s, \qquad q = s\,s' + r\,r' + a\,r'\,s.$$

On a ainsi la solution suivante du système proposé, exprimée à l'aide de 4 paramètres indépendants, r, r', s, s':

$$x = (r\,r' - s\,s')^2 - (r'\,s + r\,s' + a\,s\,s')^2,$$

$$y = 2\,(r\,r' - s\,s')\,(r'\,s + r\,s' + a\,s\,s') + a\,(r'\,s + r\,r' + a\,s\,s')^2,$$

$$z = (r\,s' - r'\,s)^2 - (s\,s' + r\,r' + a\,r'\,s)^2,$$

$$t = 2\,(r\,s' - r'\,s)\,(s\,s' + r\,r' + a\,r'\,s) + a\,(s\,s' + r\,r' + a\,r'\,s)^2,$$

$$w = (r r' - s s')^2 + a(r r' - s s')(r' s + r s' + a s s') +$$
$$(r' s + r s' + a s s')^2,$$
$$(r s' - r' s)^2 + a(r s' - r' s)(s s' + r r' + a r' s +$$
$$(s s' + r r' + a r' s^2,$$

les deux dernières expressions étant identiquement égales.

Exemples numériques.

1. $a = 1, \quad r = 1, \quad r' = 1, \quad s = 2, \quad s' = 3,$

$96^2 - 96.11 + 11^2 = 80^2 - 80.99 + 99^2 = 91^2;$

2. $a = 1, \quad r = 2, \quad r' = 2, \quad s = 1, \quad s' = 3,$

$120^2 - 120.143 + 143^2 = 65^2 - 65.153 + 153^2 = 133^2;$

3. $a = 1, \quad r = 1, \quad r' = 2, \quad s = 3, \quad s' = -5.$

$93^2 - 93.280 + 280^2 = 72^2 + 72.203 + 203^2 = 247^2.$

Pour $a = 3$, et pour les mêmes valeurs de r, r', s, s' que sub 1., 2., 3., on trouve.

1′. $504^2 - 3.504.1357 + 1357^2 =$
$168^2 - 3.168.533 + 533^2 = 209^2;$

2′. $288^2 - 3.288.901 + 901^2 =$
$153^2 - 3.153.611 + 611^2 = 341^2;$

3′. $1647^2 - 3.1647.4312 + 4312^2 =$
$35^2 - 3.35.96 + 96^2 = 19^2.$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

---

11. — *Rezolvarea în numere întregi a ecuației*

$$\sum X_i^2 = X^2. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

1. Rezolvarea în numere întregi a ecuațiilor diofantine $\Sigma X_i^2 = X^2$, este o problemă cunoscută, ca fiind tratată sub diferite forme. Un procedeu foarte elementar însă și pe care nu l-am întâlnit nicăeri, se poate deduce cu ușurință dintr'o anume rezolvare a ecuației pitagorice

(1) $$x^2 + y^2 = z^2.$$

Această rezolvare rezultă din observația că, scriind ecuația (1) sub forma:

$$X^2 + Y^2 = 1$$

unde am pus

$$X = \frac{x}{z}, \qquad Y = \frac{y}{z},$$

avem o ecuație raportată la axele de coordonate rectangulare ale planului, reprezintă un cerc cu centrul în origină și de rază egală cu unitatea.

Un punct oarecare al acestui cerc poate fi însă reprezentat parametric prin

$$X = \cos\alpha, \qquad Y = \sin\alpha$$

de unde dacă punem

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b}$$

obținem

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \qquad \sin\alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

și prin urmare soluțiile în numerile întregi ale ecuației (1) sunt

$$x = m(a^2 - b^2), \quad y = 2mab, \quad z = 2mab,$$

adică acelea clasice.

2. Acest procedeu se extinde foarte ușor la ecuația:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = u^2,$$

care scrisă sub forma:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \quad \text{cu} \quad \frac{x}{u} = X \ldots$$

și raportată la axele de coordonate rectangulare ale spațiului în 3 dimensiuni reprezintă o sferă cu centrul în origină și de rază egală cu unitatea.

Intr'adevăr, un punct oarecare al sferei acesteia poate fi reprezentat prin coordonatele parametrice:

$$X = \cos\varphi\cos\psi, \qquad Y = \cos\varphi\sin\psi, \qquad Z = \sin\varphi$$

și dacă luăm:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{p}{q} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{a}{b},$$

avem:

$$\cos\varphi = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}, \qquad \cos\psi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

$$\sin\varphi = \frac{2pq}{p^2 + q^2}, \qquad \sin\psi = \frac{2ab}{a^2 + b^2},$$

obținem:

$$X = \frac{(p^2 - q^2)(a^2 - b^2)}{(p^2 + q^2)(a^2 + b^2)}, \qquad Y = \frac{2ab(p^2 - q^2)}{(p^2 + q^2)(a^2 + b^2)},$$

$$Z = \frac{2pq}{p^2 + q^2},$$

din cari deducem imediat:

$x = m(p^2 - q^2)(a^2 - b^2)$, $z = 2mpq(a^2 + b^2)$,

$y = 2mab(p^2 - q^2)$ $u = m(a^2 + b^2)(p^2 + q^2)$,

cari sunt soluţiile căutate.

3. In cazul general al ecuaţiei:

$$\Sigma Y_i^2 = X^2, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

procedeul acesta se menţine, căci la ecuaţia:

$$\Sigma Y_i^2 = 1, \qquad i = 1, 2, 3 \ldots, n,$$

obţinută punând:

$$Y_i = \frac{X_i}{X}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

care reprezintă în spaţiul cu n dimensiuni o hipersferă cu raza 1 şi centrul în origina axelor de coordonate.

Un punct oarecare al acestei hipersfere poate fi reprezentat în coordonate parametrice:

$$Y_i = \sin \alpha_{n-i+1} \prod_{\lambda=i}^{n-1} \cos \alpha_{n-\lambda}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

convenind a lua:

$$\sin \alpha_n = 1,$$

avem mai departe:

$$Y_i = \frac{2 a_{n-i+1} b_{n-i+1}}{a_{n-i+1}^2 + b_{n-i+1}^2} \prod_{\lambda=i}^{n-1} \frac{a_{n-\lambda}^2 - b_{n-\lambda}^2}{a_{n-\lambda}^2 + b_{n-\lambda}^2}, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

în care trebue să luăm:

$$\sin \alpha_n = \frac{2 a_n b_n}{a_n^2 + b_n^2} = 1,$$

datorită convenţiei făcute.

Scriind expresia lui Y_i sub forma:

$$Y_i = \frac{2 a_{n-i+1} b_{n-i+1} \prod_{\lambda=n-i-2}^{n-1} (a_\lambda^2 + b_\lambda) \prod_{\lambda=i}^{n-1} (a_{n-\lambda}^2 - b_{n-\lambda}^2)}{\prod_{\lambda=1}^{n-1} (a_\lambda^2 + b_\lambda^2)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

deducem imediat:

$$X = m \prod_{\lambda=1}^{n-1} (a_\lambda^2 + b_\lambda^2)$$

şi

$$X_i = 2 m a_{n-i+1} b_{n-i+1} \prod_{\lambda=n-i-2}^{n-1} (a_\lambda^2 + b_\lambda^2) \prod_{\lambda=i}^{n-1} (a_{n-\lambda}^2 - b_{n-\lambda}^2)$$

unde $i = 1, 2, 3, \ldots n$.

Astfel că am rezolvat problema în general, învederându-se că necunoscutele depind de $2n-1$ parametrii întregi arbitrari.

OVIDIU A. ENULESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLV, No. 10, Iunie 1940. Formarea câtului şi restului a două polinoame când împărţitorul este descompus în factori de gradul întâi (urmare şi sfârşit), de *Th. Angheluţă*. Asupra limitării rădăcinelor ecuaţiilor algebrice, de *P. Sergescu*. O generalizare a principiului inerţiei, de *T. Vescan*. Raportul Comisiunii pentru acordarea premiului *„Vasile Cristescu"*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Boletin Matematico*, Anul XIII, N-rile 4–5, April-Mai 1940, *Buenos Aires*. Redacţionale de *B. I. Baidaff*. Semne de neegalitate, de *B. I. Baidaff*. Oarecare probleme geometrice care guvernează navigaţia aeriană, de *L. A. Santalo*. Probleme rezolvate şi propuse.

3 *Stiinţă şi Progres*, Anul VI, Aprilie-Iunie 1940. Proprietăţi ale conicelor deduse din ecuaţiile lor parametrice, de Prof. *N. Donciu*. Proprietăţi ale triunghiu (urmare), de *Cezar Ivănescu*. Volumul trunchiului de piramidă, de *Popa D. Mircea*. Razele cosmice, de *A. E. Casimir*. Revoluţia franceză şi matematica, de Prof. *G. Silaş*. Un precursor al fortificaţiilor franceze de astăzi: *Vauban*, de *Daniel Popescu*. Lipovenii, de Prof. *Vasile A. Cocoş*. Bibliografie, probleme rezolvate şi propuse.

4. *Pitagora*, Revistă de Matematici, anul V, No. 9, Iunie 1940. Triunghiuri aritmetice pentru patrate şi cuburi consecutive, de *I. V. Măties*. Asemănare-ortologie-omologie, de *Gh. D. Simionescu*. Note, probleme propuse şi rezolvate.

5. *Bulletin Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara*, Tome 9, Fasc. 3–4, 1940. Nouveaux domaines de recherches en Trigonométrie quadratique, par *V. Alaci*. Notes sur la géométrie du triangle, par *Vincenzo G. Cavallaro*. Einige numerische identitäten, von *Alfred Moesner*. Sur le problème de la projection bicentrale dans un espace à quatre dimensions, par *Mihail St. Botez*. Equilibre avec frotement sur une surface fixe, par *Michael Ghermanescu*. Introduction à l'étude statistique des équations du mouvement des fluides, par *T. Vescan*. Zur Theorie der Vektorfelder, von Dr. Ing. *Remus Răduleţ*. Rechteckige Wanderwellen auf Übertragungsleitungen, von Dr. Ing. *Remus Răduleţ*. Destructive Hydrierung von Erdölrückständen aus Boldeşti, von Prof. Dr. *C. Cândea* und Dr. *I. Sauciuc*. Oxidationsversuche an rumänischem Transformatorenöl, von Prof. Dr. *C. Cândea* und *Cristodulo*. Rezistenţa dinamică a fontei (urmare), de Ing. *Ştefan Nadaşan*. Comptes-rendu des séances de la Société scientifique de l'école polytechnique de Timişoara.

6. *Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées, de L'Ecole Polytechnique Roi Carol II*, Fasc. 28, 29, 30, 1939, Bucureşti. Sur le degré d'indétermination dans la théorie des équations différentielles, par *P. Zervos*. Du point à l'infini comme point singulier isolé, par *D.*

Pompeiu. Sur l'inversion des transformations dont le déterminant fonctionnel s'annule sans changer de signe, par *S. Stoilov.* Sur un lemne de *M. Pompeiu*, par *Miron Nicolesco.* Quelques formules de moyenne, par *Nicolas Ciorănescu.* Une inégalité pour les algébroides, par *Michel Ghermanescu.* Sur l'hexagone à cotès opposés parralléles, par *V. Thébault.* Sur un théorème de M. *D. Pompeiu*, par *V Thébault.* Bemerkung über das „Theorema egregium", von *D Barbilian.* Sur les surfaces de *Tzitzeica*, par *Gh. Th. Gheorghiu.* Triangles trihomologiques aux axes d'homologie concourantes, par *Jean Elie.* Contributions à l'étude *d'Appel* sur les applications de l'homographie en Mécanique, par *Théophile Vescan.* Sur un problème de probabilités, par *Şerban Ţiţeica.* Sur une classe d'équations intégrales et leurs applications à la statistique, par *N. Proporgescu.* L'intensité de la pesanteur à la surface de la terre et le pendule gravimétrique *Holweck-Lejay*, par *A. Corpaci.* La balistique antiaérienne, par Cpt. Com. *I. Linteş* Les recherches balistiques au tunnel aerodynamique, par Cap. C-dor *I. Linteş.* Sur le retrait linéaire du ciment, par *C. C. Teodoresco.* Sur les aberrations de sphericité des systèmes centrés, par *B. Bianu.* L'influence de la paraffine les caractéristiques des bitumes, par *T. Cerchez* et *V. Niculesco.* Un nouveau système amplificateur pour communications téléphoniques ou Radio-Téléphoniques, par *Matei G. Marinesco.* † *Georges Tzitzeica*, par *Ernest Abason.* † *Mathei M. Draghiceanu*, par *Ernest Abason.* Informations.

7. *Mauro Picone.* Nuovi metodi d'indagine per la teoria delle equazioni lineari a derivate parziali.

8. *Mauro Picone.* Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fizica Matematica.

9. *Letterio Toscano.* Sul prodotto di due polinomi di *Laguerre* e di *Hermite.*

10. *Dr. Ing. Ion Vlădescu. Phosphor im Gusseisen.* Beitrag zur Frage der Steaditausbildug. Eigenschaften als funktion des Phosphorgehaltes.

11. *Florica Marg. Caracudovici.* Aplicaţii geometrice ale calculului vectorial. — Este o interesantă monografie folositoare studenţilor.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 313. — *Să se demonstreze că ortopolurile a trei drepte paralele în raport cu acelaşi triunghiu, sunt colineare.*

G. I. DUMITRESCU

Această problemă este cunoscută, ea se găseşte în *J. Neuberg: Sur les projections et contreprojections d'un triangle fixe* precum şi în *Mathesis*, 1922, pag. 210 şi în diferite alte culegeri de probleme de geometrie. O întâlnim şi în culegerile şi în revistele noastre. Astfel în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXI, pag. 156, la soluţia problemei 3295, *Gazeta Matematică*, Vol. XXIX, pag. 252, *Revista Matematică din Timişoara*, Vol. I, pag. 147, în *Curierul Matematic*, Vol. I, Nr. 1, în *Culegere de Probleme de Geometrie*, de *G. Ţiţeica* (Probl. 64 şi 65, V), etc.

Proprietatea aste adevărată şi pentru izopol.

S-au primit bune soluţii geometrice de la d-nii: *Berdan C.*, *Botea G. N*, *Ciorănescu I. C*, *Ghişoiu I. P.*, *Gradin I. Gh*, *Iliescu Mircea*, *Ionescu I. P*, *Ionescu-Brezuica I.*, *Ionescu-Bujor T C.*, *Manolescu I. N.*, *Mihăileanu N N.*, *Popovici T. I.*, *Silion Gh. I.*, *Simionescu D Gh.*, *Stănescu D. D*, *Ştefănescu Em.*, *Stoica N. Aureliu*, *Tărăbuţă C. P*, *Teodorescu M. D.*, *Vasiliu Gh. Gh* şi *Vasiliu C. I.*

Bune soluţii prin geometria analitică au dat d-nii: *Coşniţă C.* şi *Popoviciu D. Dan.*

G-l Gh. B.

Problema 1736. — *Un număr este reprezentat în două sisteme de numeraţie prin numerile 5434 şi 2581, bazele lor diferind prin 2. Să se afle:*

1°. *Bazele sistemelor de numeraţie.*

2°. *Numărul în sistemul zecimal.*

CORNELIU LUPESCU

Soluţie. 1°. Fie $x-2$ şi x bazele sistemelor de numeraţie cerute, avem conform enunţului:

$$5(x-2)^3+4(x-2)^2+3(x-2)+4=$$
$$2x^3+5x^2+8x+1,$$

sau simplificând obţinem

$$3x^3-31x^2+39x-27=0,$$

sau

$$(x-9)(3x^2-4x+3)=0,$$

care ne dă

$$x=9,$$

singura soluţie admisibilă pentru problemă.

Rezultă că bazele celor două sisteme de numeraţie, cerute, sunt 7 şi 9.

2°. Numărul în sistemul zecimal este

$$5.7^3+4.7^2+3.7+4=1936.$$

Soluţii date de d-nii: *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Cherţmann S. Mozes* (lic. Giurgiu), *Jidanu I. C.* (Şc. Polit, Timişoara), *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Stamate I. Ionel* (student, Cluj) şi *Văduva F. Marin* (lic. Giurgiu).

Problema 1738. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sqrt[4]{5x+1}-\sqrt{5x^2-9x-2}+2\sqrt[4]{x-2}=0.$$

AUGUSTIN MATEI

Impărţind prin $\sqrt[4]{x-2}$, avem:

(1) $$\sqrt[4]{\frac{5x+1}{x-2}} - \sqrt{\frac{5x+1}{x-2}} + 2 = 0.$$

Punând,

(2) $$\sqrt[4]{\frac{5x+1}{x-2}} = y,$$

ecuaţia (1) devine

$$y - y^2 + 2 = 0,$$

sau

$$y^2 - y - 2 = 0,$$

care are rădăcinele $y_1 = 2$, $y_2 = -1$.

Rezultă atunci din (2)

$$\sqrt[4]{\frac{5x+1}{x-2}} = 2, \quad \text{de unde: } x = 3, \text{ şi}$$

$$\sqrt[4]{\frac{5x+1}{x-2}} = -1, \quad \text{de unde: } x = -\frac{3}{4}.$$

Singura soluţie care verifică ecuaţia dată este,

$$x = 3.$$

Soluţii date de d-nii: *Drăgilă Pavel* (Cluj), *Jidanu I. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Tătaru Alexandru* (lic. Orăştie).

Problema 1745. — *Să se afle pătratele perfecte care mărite cu de 64 de ori rădăcina lor pătrată, să dea tot pătrate perfecte.*

IONEL I. STAMATE

Soluţie. Fie x^2 pătratul cerut. Conform enunţului trebuie să avem:

$$x^2 + 64x = y^2.$$

Această ecuaţie se mai poate scri,

$$(x + 32)^2 - (32)^2 = y^2,$$

sau:

$$(x + 32)^2 - y^2 = 1024.$$

Mai putem scri încă:

$$(x + y + 32)(x - y + 32) =$$

$$512 \times 2 = 256 \times 4 = 128 \times 8 = 64 \times 16.$$

Cum această ecuaţie trebuie rezolvită în numere întregi, trebuie să luăm:

$$\begin{cases} x + y + 32 = 512 \\ x - y + 32 = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 32 = 256 \\ x - y + 32 = 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 32 = 128 \\ x - y + 32 = 8, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 32 = 64. \\ x - y + 32 = 16. \end{cases}$$

Rezolvind aceste sisteme obţinem respectiv, următoarele sistemele de soluţii:

x	225	98	36	8
y	255	126	60	24

Patratele perfecte cerute sunt astfel:

$8^2 = 64$, $36^2 = 1296$, $98^2 = 9604$, $225^2 = 50625$.

Soluţii date de d-nii: *Brădeanu Nicolae* (lic. Beiuş), *Cristea I. Nicolae* (lic. Blaj), *Deheleanu I. Gheorghe*, (lic. Beiuş), *Jidanu I. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Logofătu Ion* (lic. Beiuş), *Modâlcă S. Emil* (T-Severin), *Popescu Corneliu* (Giurgiu), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Tătaru Alexandru* (lic. Orăştie), *Tilică C. Ştefan* (Şc. Milit. de Geniu), *Văduva F. Marin* (lic. Giurgiu) şi *Venter D-tru.*

Problema 1746. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sqrt{m^2 + x + 2m\sqrt{x}} = \sqrt{x + m} + \sqrt{x}.$$

NICULAE I. CRISTEA

Soluţie. Ecuaţia dată se mai poate scri,

$$\sqrt{(m + \sqrt{x})^2} = \sqrt{x + m} + \sqrt{x},$$

sau:

$$m + \sqrt{x} = \sqrt{x + m} + \sqrt{x}.$$

De aci deducem

$$\sqrt{x + m} = m,$$

deci,

$$x = m(m - 1).$$

Aceasta este soluţia ecuaţiei date, ceeace uşor se verifică:

Soluţii date de d-ra: *Papadopol Elena Demetra* (lic. de fete, Bacău) şi de d nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timişoara), *Bârlea V. Suhăţeanu* (lic. Milit., N Filipescu), *Borneas Marius* (lic. Arad), *Brădeanu Nicolae* (lic. Beiuş), *Calciu Ghenadi*, *Caraianu Iancu* (Institutul Român din Sofia), *Cherţman S. Mozes* (lic. Giurgiu). *Cristea I. C-tin* (lic. Milit, Chişinău), *Damianov Daminian* (Institutul Român, Sofia), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Deheleanu I. Gheorghe* (lic. Beiuş), *Doscan Gh. Alexandru* (lic Giurgiu), *Dragomir Ermin Adrian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Hermann I. Carol* (Blaj), *Jidanu I. C-tin* (lic Beiuş), *Logofătu M. Ioan* (lic. Beiuş), *Luca I. I.* (lic. Arad), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt.), *Mahrenholtz Johannes* (Cottbus), *Mihăileanu C. Andrei* (lic. Arad), *Mironescu I. D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Mocanu I. C-tin* (lic. Milit, Cernăuţi), *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin),

Săndulică Robinson (Institutul Român, Sofia), *Schapira Salo* (lic Piatra-Neamț), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Șlavov Iacob* (Bolgrad), *Spătaru Alexandru* (lic Cluj), *Stamate I. Ionel* (student, Cluj), *TătaruAlexandru* (lic. Orăștie), *Tica P. Marin-Gal* (Lt.), *Tilică C. Ștefan* (Șc. Milit. de Geniu), *Topalescu Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Văduva F. Marin* (lic. Giurgiu), *Venter D-tru* (lic. Beiuș) și *Vijelie Gh. Eugen* (lic. Milit, N. Filipescu).

PROBLEME PROPUSE

1858. — Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre, format prin sudarea a trei patrate.

G-L GH. BUICLIU

1859. — Cu cifrelele 1, 2, 2, 5, 8 să se formeze un patrat perfect de cinci cifre.

ȘTEFAN C. TILICA

1860. — In triunghiul A B C se duce transversala Δ, se unesc vârfurile sale cu mijloacele segmentelor interceptate de laturile triunghiului pe transversală și fie A_1, B_1, C_1 piciorele celor trei drepte pe laturi, iar A_2, B_2, B_2 picioarele paralelor din vârfuri la transversală.

1°. Să se găsească locul intersecțiilor (AA_1, BB_1) (AA_1, CC_1), (BB_1, CC_1) când Δ variază.

2°. Triunghiul $A_2B_2C_2$ este omologic cu A B C, având ca axă de omologie dreapta $A_1B_1C_1$.

1861. — Să se găsească condiția de compatibilitate și să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \alpha\dfrac{x-1}{x+1}+\beta\dfrac{y-1}{y+1}=i, \\ \alpha\dfrac{x+1}{x-1}+\beta\dfrac{y+1}{y-1}=-i, \\ \dfrac{x^2-1}{x}+\dfrac{y^2-1}{y}=4i(\alpha+\beta) \qquad (i^2=-1). \end{cases}$$

IONEL I. STAMATE

1862. — Să se determine parametru λ (rațional), astfel încât rădăcinele ecuației

$$2x^4+x^3+6\lambda^2x^2-14x+8\lambda=0,$$

să verifice relația

$$\sum_{i=1}^{4}\operatorname{arc\,tg}x_i=\frac{\pi}{2},$$

și apoi să se rezolve complect ecuația dată știind că o rădăcină este, $\lambda+\sqrt{\lambda}$.

MIHU CERCHEZ

1863. — Să se arate că în orice triunghiu avem relațiile:

$$\frac{a^2(p-a)+b^2(p-b)+c^2(p-c)}{Rr}-4p=$$

$$\sum a\cos(B-C)=\frac{4pr}{R}.$$

STELIAN CETATEANU

1864. — Se cere graficul configurației reprezentate parametric prin ecuațiile:

$$\begin{cases} x=(2x-3)\,cp\,\alpha \\ y=(2x-3)\,sp\,\alpha. \end{cases}$$

V. ALACI

1865. — O bilă de greutate $\overline{G}$ se mișcă în spațiu sub acțiunea forțelor $\overline{F_1}$ și $\overline{F_2}$ cari trec prin centrul de greutate al bilei și sunt conținute în același plan vertical.

Forța $\overline{F_1}$ este orizontală, iar forța $\overline{F_2}$ fiind situată de asupra lui $\overline{F_1}$, face cu prelungirea lui $\overline{F_1}$ unghiul α dat de relația,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{G}{F_1}.$$

Se cere:

1°. Care este accelerația mișcării? Caz particular

$F_1=\sqrt{3}\,G$, $F_2=G$; $F_1=\sqrt{3}\,G$, $F_2=2G$.

2°. Știind că $F_1=\sqrt{3}\,G$, să se găsească unghiul α și mărimea forței $\overline{F_2}$, astfel ca bila să aibă o mișcare de urcare pe verticală, iar accelerația mișcării să fie jumătate din accelerația gravității.

LT. PETRE P ALMAJAN

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait a Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 286 articles, 249 notes et 1892 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIII, s'a primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Prof. Ion Rizescu.* Str. Mihăileanu 18, Constanţa.
2. *Prof. Constantin Borş.* Str. Petru Rareş 85, Piatra Neamţ.
3. D-l *Marin I. Popa,* Licenţiat în Matematici. Bulevardul Alexandru I. Cuza 20, Bucureşti II.
4. *Dr. Michail St. Botez,* profesor, Str. I. G. Duca 15, Piatra Neamţ.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XIX, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

A apărut volumul:

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ

de

VALERIU ALACI

Profesor, Şcoala Politechnică, Timişoara.

272 pagini — Preţul: 180 Lei.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XIX, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

ANUL XX AUGUST 1940 No 6.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **EUGEN VISA**: INTEGRAREA FUNCTIUNILOR PSEUDO-HIPERBOLICE.
2. NOTE MATEMATICE: 12, 13, 14.
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 489, 1639, 1683, 1684, 1702, 1864.
5. PROBLEME PROPUSE: 1866-1873.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XX, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIX inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XX — No. 6 TIMISOARA, AUGUST 1940

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

INTEGRAREA FUNCȚIUNILOR PSEUDO-HIPERBOLICE

DE
EUGEN VIȘA
PROFESOR.

Funcțiunile pseudo-hiperbolice, cari alcătuesc obiectul studiului publicat de subsemnatul în N-rele 1, 2, 4 și 5 din anul în curs al acestei reviste, își găsesc, întocmai ca și *funcțiunile patratice* ale d-lui profesor *Alaci,* numeroase și variate aplicațiuni, a căror viziune, dat fiind că sunt la fel de importante, am lăsat-o să se desprindă chiar din cuprinsul acelui studiu.

Una din aceste aplicațiuni, susceptibilă de a fi luată imediat în considerare și de care îmi propun a mă ocupa în cele de mai jos, o constitue problema *integrării funcțiunilor pseudo-hiperbolice.*

Voiu trata anume această problemă în cadrul restrâns al *integralelor raționale* în $sph\,x$ și $cph\,x$, indicând atât *metoda generală* pentru efectuarea acestor integrale, cât și unele *metode directe* pentru anumite cazuri particulare.

In felul acesta vreau să spun ca voiu căuta, cel puțin în parte, să urmez planul după care s'a condus și d-l profesor *Alaci* în tratarea problemei corespunzătoare din cazul *funcțiunilor patratice.*[1]

Metoda generală.

Fie să se efectueze integrala definită:

$$I=\int_a^b R(sph\,x,\ cph\,x)\,dx,$$

unde simbolul $R(sph\,x,\ cph\,x)$ *reprezintă o funcțiune rațională de* $sph\,x$ *și* $cph\,x$.

[1]) A se vedea lucrarea D-sale *„Trigonometria patratică"*, Partea IV, Cap. V, pag. 221, precum și articolul D-sale *„L'intégration des fonctions quadratiques"*, publicat în *Bulletin Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timișoara,* Tome 8, Fasc. 3–4.

Soluție. Avem de considerat următoarele trei cazuri:

1°. *Cazul* $0\leq a\leq b$. Făcând schimbarea de variabilă

$$sph\,x=t \tag{1}$$

și ținând în acelaș timp seama că pentru $x>0$

$$cph\,x-sph\,x=1,$$

deducem:

$$cph\,x=1+t.$$

Pe de altă parte, diferențiind relația

$$x=\arg sph\,t, \tag{2}$$

care este echivalenta relației (1), obținem:

$$dx=\frac{dt}{1+2t},$$

căci $t>0$.

In felul acesta, integrala propusă devine:

$$I=\int_{sph\,a}^{sph\,b}\frac{R(t,\ 1+t)}{1+2t}\,dt,$$

adică o integrală rațională de t.

2°. *Cazul* $a\leq b\leq 0$. In acest caz facem tot schimbarea de variabilă definită prin relația (1).

Vom ține seama însă că de astă dată, x fiind negativ, avem

$$cph\,x+sph\,x=1,$$

așa încât

$$cph\,x=1-t.$$

De asemenea, diferențierea relației (2) ne dă acum

$$dx=\frac{dt}{1-2t},$$

căci t e negativ ca și x.

Deducem astfel că în cazul de faţă integrala noastră devine:

$$I = \int_{sph\, a}^{sph\, b} \frac{R(t, 1-t)}{1-2t}\, dt,$$

adică tot o integrală raţională de t.

3°. *Cazul* $a \leqq 0 \leqq b$. Acest al treilea caz nu este decât o combinaţie a primelor două, deoarece integrala dată se poate scrie:

$$I = \int_a^0 R(sph\, x,\ cph\, x)\, dx + \int_0^b R(sph\, x,\ cph\, x)\, dx,$$

prima parte intrând în cazul 2°, iar a doua în cazul 1°.

Metode directe.

Iată acum şi câteva probleme, cari pun în evidenţă unele *metode directe* pentru efectuarea integralelor din categoria celor cari ne preocupă.

Problema 1. *Să se efectueze integralele definite:*

$$I = \int_0^a sph\, x\, dx, \qquad J = \int_0^a cph\, x\, dx; \qquad (a > 0).$$

Soluţie. Observăm în primul rând că

$$J - I = \int_0^a (cph\, x - sph\, x)\, dx = \int_0^a dx = a$$

de oarece, x fiind pozitiv.

$$cph\, x - sph\, x = 1.$$

Pe de altă parte, ţinând seama că derivata funcţiunii $sph\, x$, pentru $x > 0$, este

$$(sph\, x)' = cph\, x + sph\, x,$$

prin integrare în intervalul $(0, a)$, deducem:

$$J + I = sph\, a.$$

Având astfel suma şi diferenţa integralelor date, expresiile lor se obţin foarte uşor. Găsim anume:

$$I = \frac{1}{2}(sph\, a - a)$$

$$J = \frac{1}{2}(sph\, a + a).$$

Problema 2. *Să se efectueze integralele definite:*

$$\int_{-a}^a sph\, x\, dx, \quad \int_{-a}^a cph\, x\, dx, \qquad (a > 0).$$

Soluţie. Observăm că

$$\int_{-a}^a sph\, x\, dx = \int_0^a sph\, x\, dx - \int_0^{-a} sph\, x\, dx$$

$$\int_{-a}^a cph\, x\, dx = \int_0^a cph\, x\, dx - \int_0^{-a} cph\, x\, dx.$$

Ultimele integrale din membrul al doilea, prin schimbarea lui x în $-x$, devin respectiv:

$$\int_0^{-a} sph\, x\, dx = \int_0^a sph\, x\, dx$$

$$\int_0^{-a} cph\, x\, dx = -\int_0^a cph\, x\, dx,$$

aşa încât, ţinând seama de rezultatele din cazul problemei precedente, obţinem:

$$\int_{-a}^a sph\, x\, dx = 0, \qquad \int_{-a}^a cph\, x\, dx = sph\, a + a.$$

Problema 3. *Să se efectueze integrala definită:*

$$\int_0^a sph\, x\, cph\, x\, dx, \qquad (a > 0).$$

Soluţie. Considerăm funcţiunea $sph^2 x$, a cărei derivată pentru $x > 0$ este

$$(sph^2 x)' = 2\, sph\, x\, (cph\, x + sph\, x) = 2\, sph\, x\, (2\, cph\, x - 1).$$

Multiplicând cu dx şi integrând în intervalul $(0, a)$, deducem:

$$sph^2 a = 4 \int_0^a sph\, x\, cph\, x\, dx - sph\, a + a$$

de unde, prin izolarea integralei date, obţinem:

$$\int_0^a sph\, x\, cph\, x\, dx = \frac{sph\, a\, (sph\, a + 1) - a}{4}$$

şi cum

$$sph\, a + 1 = cph\, a,$$

în cele din urmă avem:

$$\int_0^a sph\, x\, cph\, x\, dx = \frac{sph\, a\, cph\, a - a}{4}.$$

Problema 4. *Se cere valoarea integralei definite:*

$$\int_{-a}^a sph\, x\, cph\, x\, dx, \qquad (a > 0).$$

Soluţie. Avem că

$$\int_{-a}^a sph\, x\, cph\, x\, dx = \int_0^a sph\, x\, cph\, x\, dx - \int_0^{-a} sph\, x\, cph\, x\, dx.$$

Pe de altă parte, schimbând pe x în $-x$, deducem:

$$\int_0^{-a} sph\,x\,cph\,x\,dx = \int_0^{a} sph\,x\,cph\,x\,dx$$

aşa încât egalitatea precedentă ne dă imediat:

$$\int_{-a}^{a} sph\,x\,cph\,x\,dx = 0.$$

Problema 5. *Să se efectueze integralele definite:*

$$I_m = \int_0^a sph^m x\,dx, \qquad J_m = \int_0^a cph^m x\,dx$$

unde a şi m sunt cantităţi pozitive, cea dintâi arbitrară, iar a doua putând primi numai valori întregi.

Soluţie. Considerăm funcţiunile

$$u = sph^m x, \qquad v = cph^m x.$$

Luând derivatele acestor funcţiuni pentru $x > 0$, avem respectiv:

$$u' = m\,sph^{m-1} x\,(cph\,x + sph\,x) = m\,sph^{m-1} x\,(2\,sph\,x + 1)$$

$$v' = m\,cph^{m-1} x\,(cph\,x + sph\,x) = m\,cph^{m-1} x\,(2\,cph\,x - 1)$$

de unde, prin integrare în intervalul $(0, a)$, deducem următoarele relaţii de recurenţă pentru integralele date:

$$(3) \quad \begin{cases} 2I_m + I_{m-1} = \dfrac{sph^m a}{m} \\ 2J_m - J_{m-1} = \dfrac{cph^m a - 1}{m}. \end{cases}$$

Inmulţind aceste relaţii respectiv cu $(-2)^{m-1}$ şi cu 2^{m-1}, din considerarea sumelor

$$\sum_{k=1}^{m} (-2)^k I_k - \sum_{k=1}^{m} (-2)^{k-1} I_{k-1} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{(-2)^{k-1} sph^k a}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{m} 2^k J_k - \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} J_{k-1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{2^{k-1} (cph^k a - 1)}{k}$$

şi ţinând seama că

$$I_0 = J_0 = a,$$

deducem următoarele formule remarcabile

$$(4) \quad \begin{cases} (-2)^m I_m = a - \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{(-2)^{k-1} sph^k a}{k} \\ 2^m J_m = a + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{2^{k-1} (cph^k a - 1)}{k} \end{cases}$$

valabile pentru toate valorile întregi ale lui $m \geq 1$.

Cazuri particulare. Pentru $m = 1$, formulele (4) ne dau respectiv:

$$(5) \qquad I_1 = \frac{sph\,a - a}{2}, \quad J_1 = \frac{sph\,a + a}{2}$$

cari nu sunt decât rezultatele din cazul *Problemei 1.*

De asemenea, făcând în relaţiile (4) $m = 2$, găsim:

$$(6) \qquad I_2 = \frac{sph^2 a - sph\,a + a}{4},$$

$$J_2 = \frac{sph^2 a + 3\,sph\,a + a}{4}.$$

Observare. Dacă ţinem seama de relaţia

$$cph\,x - sph\,x = 1, \quad (x > 0)$$

deducem că integrala J_m se poate exprima cu ajutorul integralei I_m prin formula:

$$(7) \qquad J_m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k I_k$$

unde simbolul C_m^k reprezintă numărul combinărilor a m obiecte luate câte k.

Problema 6. *Se cere valoarea integralei definite:*

$$H_m = \int_0^a (sph\,x\,cph\,x)^m\,dx$$

unde a şi m au aceeaşi semnificaţie ca şi în cazul problemei precedente.

Soluţie. Considerăm funcţiunea

$$y = (sph\,x\,cph\,x)^m$$

a cărei derivată pentru $x > 0$ este

$$y' = m\,(sph\,x\,cph\,x)^{m-1}\,(sph\,x + cph\,x)^2.$$

Vom nota pentru moment

$$(8) \qquad (sph\,x + cph\,x)^2 = z$$

şi vom ţine seama în acelaş timp că, pentru $x > 0$ avem relaţia

$$cph\,x - sph = 1$$

care prin ridicare la patrat, ne dă

(9) $$(cph\,x - sph\,x)^2 = 1.$$

Eliminând între relaţiile (8) şi (9) suma $(sph^2 x + cph^2 x)$, găsim:

$$z = 4\,sph\,x\,cph\,x + 1$$

ceeace ne arată că derivata funcţiunii considerate se mai poate pune şi sub forma:

$$y' = m\,(sph\,x\,cph\,x)^{m-1}\,(4\,sph\,x\,cph\,x + 1)$$

de unde, integrând apoi în intervalul $(0, a)$, deducem formula:

(10) $$4\,H_m + H_{m-1} = \frac{(sph\,a\,cph)^m}{m}$$

care constitue o relaţie de recurenţă pentru integrala propusă.

Multiplicând această relaţie cu $(-4)^{m-1}$, aplicându-i în acelaş timp operaţia de însumare:

$$\sum_{k=1}^{m}(-4^k H_k - \sum_{k=1}^{m}(-4^{k-1} H_{k-1} =$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\frac{(-4)^{k-1}\,(sph\,a\,cph\,a)^k}{k}$$

şi ţinând seama că

$$H_0 = a$$

deducem formula

(11) $$(-4)^m H_m = a - \sum_{k=1}^{m}\frac{(-4)^{k-1}\,(sph\,a\,cph\,a)^k}{k}$$

cu ajutorul căreia se calculează direct integrala H_m pentru toate valorile întregi ale lui $m \geqq 1$.

Cazuri particulare. Făcând în formula (11) $k = 1$, regăsim valoarea integralei din cazul *Problemei 4* şi anume:

(12) $$H_1 = \frac{sph\,a\,cph\,a - a}{4}.$$

In mod analog, pentru $k = 2$, formula (11) ne dă:

(13) $$H_2 = \frac{2\,(sph\,a\,cph\,a)^2 - sph\,a\,cph\,a + a}{16}.$$

Observaţii. 1°. Integrala de care ne-am ocupat în această ultimă problemă se poate exprima şi cu ajutorul integralei I_m din cazul problemei precedente.

In adevăr, ţinând seama că pentru $x > 0$,

$$cph\,x - sph\,x = 1,$$

relaţia de definiţie a integralei H_m ne dă numai decât:

(14) $$H_m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k\,I_{m+k}$$

unde C_m^k este simbolul combinărilor.

2°. In mod analog se deduce că integrala ceva mai generală

(15) $$I_{m,n} = \int_0^a sph^m x\,cph^m x\,dx$$

cu a pozitiv oarecare, iar m şi n pozitivi întregi, se poate exprima, cu ajutorul aceleiaşi integrale I_m, prin formula:

(16) $$I_{m,n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,I_{m+k},$$

faţă de care formula (14) constitue cazul particular când $n = m$.

EUGEN VISA
Profesor

NOTE MATEMATICE

12. — *Des égalités multigrades, vraies aux degrés 2 et 4 à partir de systémes de nombres donnés par Diophante et Fermat.*

Diophante a donné trois triangles rectangles en nombres entiers de même aire, savoir

$$40, 42, 58;\quad 24, 70, 74;\quad 15, 112, 113.$$

Or, la condition nécessaire et suffisante pour que le systéme diophantien

$$a_1^p + a_2^p + a_3^p = b_1^p + b_2^p + b_3^p,\ (p = 2,4)$$

admette des solutions, est qu' il existe au moins deux triangles en nombres entiers de même aire (voir mon ouvrage *„Sur les égalités multigrades"*, page 36). Les calculs indiqués loc. cit. permettent d'obtenir les systémes d'identités suivants qui avaient échappé à *Diophante:*

I $40^p + 42^p + 74^p = 24^p + 58^p + 70^p$, ou
$20^p + 21^p + 37^p = 12^p + 29^p + 35^p$, $(p = 2,4)$
$S_2 = 2.210$ $\quad S_4 = 2.228.642$

II $40^p + 42^p + 113^p = 15^p + 58^p + 112^p$, $(p = 2,4)$
$S_2 = 16.133$ $\quad S_4 = 168.719.057$

III $24^p + 70^p + 113^p = 15^p + 74^p + 112^p$, $(p = 2,4)$
$S_2 = 18.245 \qquad S = 187.389.137.$

Voici des égalités multigrades formées avec les côtés de 4 triangles rectrangles en nombres entiers de même aire donnés par *Fermat*. Nous emploierons, au lieu d'écrire

$$a_1^p + a_2^p + a_3^p = b_1^p + b_2^p + b_3^p, \quad (p\ 2, 4)$$

la notation abrégée

$$a_1, a_2, a_3 \overset{2,4}{=} b_1, b_2, b_3.$$

I 47560, 49938, 87986 $\overset{2,4}{=}$ 28536, 83230, 68962
$S_2 = 12.497.293.640 \qquad S_4 = \ldots 6752$
(tranche terminale)

II 47560, 49938, 134357 $\overset{2,4}{=}$ 17835, 133168, 68962

III 47560, 49938, 1.412.881 $\overset{2,4}{=}$ 1681, 1.412.880, 68962

IV 28536, 83230, 134357 $\overset{2,4}{=}$ 17835, 133168, 87.986

V 28536, 83230, 1.412.881 $\overset{2,4}{=}$ 1681, 1.412.880, 87.986

VI 17835, 133168 1,412.881 $\overset{2,4}{=}$
1681, 1.412.880, 134.357

D'une manière générale, si l'on connaît n triangles rectangles en nombres entiers de même aire, on peut former avec $3n$ entiers, $\frac{n(n-1}{2}$ égalités multigrades distinctes du type ci-dessus.

Pour $n = 7$, on peut obtenir autant d'égalités multigrades distinctes qu'on a de nombres (21).

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

---

13. — *O metodă pentru stabilirea unor identităţi trigonometrice.*

Să considerăm unghiurile:

$$(1) \qquad \begin{cases} A' = n\pi - kA \\ B' = n\pi - kB \\ C' = n\pi - kC. \end{cases}$$

unde A, B, C sunt unghiuri pentru care avem: $A + B + C = \pi$, iar n şi k sunt numere oarecare.

Punând condiţia ca $A' + B' + C' = \pi$, obţinem adunând relaţiile (1):

$$\pi = 3n\pi - k\pi$$

de unde

$$(2) \qquad k = 3n - 1.$$

Ţinând seama de (2), relaţiile (1) devin:

$$(3) \qquad \begin{cases} A' = n\pi - (3n-1)A \\ B' = n\pi - (3n-1)B \\ C' = n\pi - (3n-1)C. \end{cases}$$

Să considerăm acum nişte identităţi cunoscute pentru funcţiile trigonometrice ale unghiurilor A, B, C. Aceste identităţi fiind valabile şi pentru funcţiile trigonometrice ale unghiurilor A', B', C' (căci $A' + B' + C' = \pi$) suntem conduşi pentru valori convenabile ale lui n, la alte identităţi interesante între unghiurile A, B, C.

Două exemple:

Fie identitatea cunoscută:

$$\Sigma \operatorname{tg} A = \Pi \operatorname{tg} A.$$

Scriind-o pentru unghiurile A', B' C', avem:

$$(4) \qquad \Sigma \operatorname{tg}[n\pi - (3n-1)A] = \Pi \operatorname{tg}]n\pi - 3n - 1)A].$$

Pentru $n = 1/2$, relaţia (4) devine:

$$\Sigma \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \Sigma \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)$$

sau:

$$\Sigma \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = \Sigma \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

Pentru $n = 1/4$, avem:

$$\Sigma \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{A}{4}\right] = \Pi \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{A}{4}\right]$$

sau:

$$\sum \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4}}{1 - \operatorname{tg} \frac{A}{4}} = \prod \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4}}{1 - \operatorname{tg} \frac{A}{4}}$$

sau:

$$\sum \left(1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4}\right)\left(1 - \operatorname{tg} \frac{B}{4}\right)\left(1 - \operatorname{tg} \frac{C}{4}\right) = \Pi \left(1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4}\right).$$

Identităţi analoage obţinem pentru: $n = -\frac{1}{2}$. $-\frac{1}{4}$. Dacă n e un număr întreg, pozitiv sau negativ, identitatea (4) devine:

$$\Sigma \operatorname{tg}(3n - 1)A = \Pi \operatorname{tg}(3n - 1)A.$$

Fie acum relaţia cunoscută:

$$\Sigma \sin A = 4 \Pi \cos \frac{A}{2}.$$

Pentru A', B', C' ea devine:

$$\Sigma \sin [n\pi - (3n-1)A] =$$

$$4\Pi \cos\left[n \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3n-1}{2} A\right]. \tag{5}$$

Pentru $n = 1$, obţinem identitatea bine cunoscută:

$$\Sigma \sin 2A = 4\Pi \sin A.$$

Dacă $n = 1/2$, relaţia (5) devine:

$$\Sigma \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = 4\Pi \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right)$$

sau:

$$\Sigma \cos\frac{A}{2} = \sqrt{2}\Pi\left(\cos\frac{A}{4} + \sin\frac{A}{4}\right).$$

Pentru $n = 2p$, (unde p e întreg şi pozitiv), avem:

$$-\Sigma \sin(6p-1)A = 4(-1)^p \Pi \cos\frac{6p-1}{2} A$$

sau:

$$\Sigma \sin(6p-1)A = 4(-1)^{p+1} \Pi \cos\frac{6p-1}{2} A.$$

Pentru $n = 2p+1$, obţinem:

$$\Sigma \sin(6p+2)A = 4(-1)^p \Pi \sin(3p+1)A.$$

Relaţii analoage obţinem pentru n negativ.

Cred că aceste două exemple sunt suficiente pentru a arăta utilitatea metodei întrebuinţate.

ANDRONACHE VLADIMIR
STUDENT-IAŞI.

---

14. — *O simplă observaţie în legătură cu unele configuraţii geometrice reprezentate parametric.*

Presupunem că se consideră o configuraţie geometrică reprezentată parametric prin nişte ecuaţii de forma:

$$\begin{cases} x = f(\alpha) \\ y = g(\alpha) \end{cases} \tag{1}$$

unde α este un *parametru unghiular*, a cărui natură, de altfel rămâne absolut arbitrară.

O problemă interesantă ce se poate pune în legătură cu o configuraţie de acest fel şi a cărei importanţă a fost sesizată cu deosebire, dacă nu cumva chiar exclusiv, de D-l Profesor *V. Alaci*, din prilejul diverselor aplicaţii geometrice ale *funcţiunilor* D-sale *patratice*, este determinarea pe cale *grafică* a unghiului α corespunzător unui punct P al ei şi invers[1].

De sigur, acestei probleme grafice, îi corespunde una *analitica* echivalentă, a cărei considerare poate fi şi ea de folos, cel puţin în unele cazuri.

Ne propunem s-o evidenţiem în cele de mai jos. Pentru aceasta vom considera alături de unghiul α corespunzător unui punct P al configuraţiei (1) şi unghiul polar corespunzător aceluiaşi punct al ei.

Notând acest unghiu cu θ, se ştie atât dela studiul *coordonatelor polare* cât şi al celor *patratice*, că expresia lui în funcţie de *coordonatele carteziene* este dată de relaţia

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Pe de altă parte, din ecuaţia (1) obţinem:

$$\frac{g(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{y}{x} \tag{3}$$

de unde, comparând la rândul său cu (2), deducem:

$$\frac{g(\alpha)}{f(\alpha)} = \operatorname{tg}\theta. \tag{4}$$

Relaţia (4) stabileşte, după cum se vede, o legătură între unghiurile α şi θ, aşa încât, de îndată ce ne dăm unul dintre ele, celalalt poate fi şi el determinat prin rezolvarea ecuaţiei de o singură necunoscută pe care o constitue în acest caz relaţia de mai sus.

Evident, rezolvarea în concret a ecuaţiei (4), fie în raport cu unghiul α, fie în raport cu θ, poate prezenta serioase dificultăţi. Noi am urmărit însă pur şi simplu stabilirea acestei ecuaţii generale, pentru a pune astfel în evidenţă *problema analitică* echivalentă *problemei grafice* a D-lui Profesor *Alaci*, care totuşi continuă a-şi păstra importanţa caracteristică naturei sale.

EUGEN VISA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLV, No. 11, Iulie 1940. Disertaţia lui *Johan Binder*, de *Victor Marian*. Contribuţiuni la rezolvarea ecuaţiilor de gradul al patrulea, de *I. V. Mătieş*. Câteva consideraţii de geometria triunghiului,

[1]) A se vedea lucrările D-sale: *„Trigonometria patratică"* (Timişoara, 1939) şi *„Nouveaux domaines de recherches en Trigonométrie quadratique"* (Bulletin scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara, Tome 9, Fasc. 3–4).

de *Iulian Petrescu*. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului de geometrie elementară *„G. Ţiţeica"*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2 *Disquisitiones Mathematicae et Physicae, Tomes 1, Fasc 1, 1940.* Les publications de l'Institut de recherches scientifiques, *Regele Carol II*, par *V. Vâlcovici*. Axiomatische Begründung des Abelschen Theorems im Grossen, von *D. Barbilian*. Des sous-ensembes sur lesquels une transformation continue d'un espace est intérieure ou topologique, par *S. Stoilov*. La dérivée moyenne d'une fonction et certaines équations fontionnelles, par *N Ciorănescu*. Notes sur les généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur, par *T. Popovici*. Nouvelles recherches sur les fonctions polyharmoniques, par *M. Nicolescu* De la définition du pôle en théorie des fonctions, par *D. Pompeiu*. Comportement asymtotique des chaînes à liaisons complétes, par *O. Onicescu* et *Gh. Mihoc*. Sur les espaces à connexion affine, par *G. Vrânceanu* Sur les petits mouvement des corps élastiques, par *Gr. C. Moisil*. Sur le mouvement d'un solide dans un milieu résistant, par *V. Vâlcovici*. Sur le coefficient de transmission d'une barrière de potentiel coulombien, par *G. Badareu*. Les spectres d'absortion *L* et les niveaux caractèristiques de l'uranium, du platine et du tungstène, par *Y. Cauchois* et *I. Mănescu*. Spectres X caractèristiques du Polonium I, par *H. Hulubei* et *Y. Chauchois*. Étude du potentiel explosif dans les vapeurs d'hydrocarbures, par *E. Badareu* et *I. Constantinescu*.

3. *Prof. Dr. Mihai Şerban*. Introducere la studiul *„Agronomiei Sociale"*, *1939*,

4 *Prof. Dr. Mihai Şerban*. Ţările agrare extensive şi potenţialul de afirmare a intereselor naţionale, 1940.

5. *Prof. Dr. I. Curea*. Staţiunea Seismică a Observatorului Astronomic din Cluj, 1940.

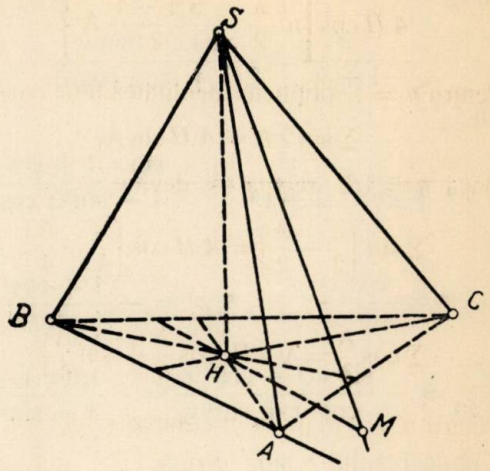
PROBLEME REZOLVATE

Problema 489. — *Se dă un triedru tridreptunghiu şi un punct. Prin punctul dat se duce un plan care taie triedrul după un triunghiu. Se cere locul geometric al ortocentrului acestui triunghiu, planul trecând necontenit prin punctul dat.*

GH. CONSTANTINESCU

Fie S vârful triedrului, M punctul fix dat şi A, B, C intersecţiile muchilor triedrului cu un plan variabil, dus prin M. Fie H proiecţia lui S pe planul A B C.

Muchea B S fiind perpendiculară prin construcţie pe S A şi S C va fi perpendiculară şi pe planul A S C, deci şi pe dreapta A C din acest plan. Apoi S H fiind perpendiculară pe planul A B C, va fi perpendiculară şi pe A C. Dreapta A C fiind perpendiculară pe S H şi S B va fi perpendiculară pe planul B S H şi deci şi pe dreapta B H. La fel se arată că A B şi B C sunt perpendiculare pe C H şi A H, deci H este ortocentrul triunghiului A B C. Triunghiul M H S având unghiul din H drept şi



punctele M şi S de pe cotele fixe, vârful său H va descrie o sferă de diametru M S.

Au dat această soluţie: *Ardelea R, Botea G. N, Braester I. O., Cernes A. M, Coşniţa C., Dinescu Fl, Ionescu-Bujor Th A., Nestor G. D, Nicolau-Dobridor I., Manolescu I. N., Segal L., Sobel S. M., Tăruş V., Teodorescu N şi Winkler A. A.*

Au rezolvat problema considerând cunoscută proprietatea că proectiv vârfului S pe planul A B C este ortocentrul triunghiului A B C, când triedrul este dreptunghiu: *Bey M. Gh., Chiser P. M, Dărmănescu I., Râmniceanu I Cr., Stan I. A.* şi *Vaciliu Gh. Gh.*

Proprietatea enunţată de aceşti rezolvitori se găseşte în *Culegere de Probleme de Geometrie* (ediţia I) la cap, XII, pag. 148, problema 57.

Bune soluţii analitice de la *Coşniţă C., Manolescu I. N.* şi *Stoica N. Aureliu.*

Problema 1639. — *Dacă*

$$u^2+v^2=2,\ \frac{v}{u}=\operatorname{tg}(x+45^0),\ w=\cos x\operatorname{cosec}^2 x$$

avem şi

$$\frac{u'}{1+u^2}+\frac{v'}{1+v^2}=\frac{w'}{1+w^2}.$$

N. N. MIHAILEANU

Soluţia I. Din primele două relaţii, obţinem

$$u=\sqrt{2}\cos(x+45^0),\qquad v=\sqrt{2}\sin(x+45^0)$$

deci

$$\frac{u'}{1+u^2}=-\frac{\sqrt{2}\sin(x+45^0)}{1+2\cos^2(x+45^0)}=-\frac{\cos x+\sin x}{2(1-\sin x\cos x)}$$

analog [1]

$$\frac{v'}{1+v^2}=\frac{\cos x-\sin x}{2(1+\sin x\cos x)}$$

atunci

$$\frac{u'}{1+u^2}+\frac{v'}{1+v^2}=-\frac{\sin x(1+\cos^2 x)}{1-\sin^2 x\cos^2 x}$$

din

$$w=\frac{\cos x}{\sin^2 x} \qquad **w'=-\frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}$$

$$\frac{w'}{1+w^2}=-\frac{\sin x(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x+\sin^4 x}=-\frac{\sin x(1+\cos^2 x)}{1-\sin^2 x\cos^2 x}$$

de unde rezultă relaţia cerută,

Soluţii date de d-nii: *St. Cetăţeanu* (lic. Şincai), *Al Popescu Zorica* şi *M. D. Stoenescu* (lic. Mil. M-rea Dealu).

Soluţia II, dată de d-l *Dumitru D. Matei* (şc. polit. Iaşi). Calculând expresia

$$\frac{u+v}{1-uv}$$

cu valorile cunoscute

$$u=\sqrt{2}\cdot\cos(x+45^0),\quad v=\sqrt{2}\cdot\sin(x+45^0)$$

avem

$$\frac{u+v}{1-uv}=\frac{2\cos x}{1-\cos 2x}=\frac{\cos x}{\sin^2 x}=w$$

relaţie echivalentă cu

$$\operatorname{arc\,tg} u+\operatorname{arc\,tg} v=\operatorname{arc\,tg} w,$$

care derivată, dă relaţia cerută.

Notă. A se vedea şi R. M. T. XVIII—29.

N. M.

Problema 1683. — *Să se arate că*

$$\frac{x^2+y}{x^2-y}+\frac{y^2+x}{y^2-x}-\frac{xy-1}{xy+1}=\frac{(x^2+y)(y^2+x)(xy-1)}{(x^2-y)(y^2-x)(xy+1)}.$$

N. N. MIHAILEANU

---

[1]) Se putea obţine şi fără calcul fiindcă

$$v=\sqrt{2}\cos(45^0-x);$$

derivăm în raport cu $(-x)$ adică schimbăm semnul lui x în rezultatul precedent şi înmulţim totul cu $(-x)'=-1$.

Notând cu E numărătorul din prima parte, avem

$$E=(xy+1)[(x^2+y)(y^2-x)+(y^2+x)(x^2-y)]+$$
$$-(xy-1)(x^2-y)(y^2-x).$$

$$E=(xy+1)(2x^2y^2-2xy)-(xy-1)(x^2-y)(y^2-x)$$

$$E=(xy-1)[2xy(xy+1)-(x^2-y)(y^2-x)]$$

$$E=(xy-1)(x^2y^2+xy+x^3+y^3)$$

$$E=(xy-1)(x^2+y)(y^2+x)$$

adică numărătorul părţii a doua şi identitatea este verificată.

Soluţii date de d-nii: *N. N. Aniţescu, G. G. Anton* (Şc. polit., Bucureşti), *A. C. Boeru* (lic. Milit., M-rea Dealu), *M. Borneas* (lic., Arad), *C. Cernat* (lic. Milit., M-rea Dealu), *S. Cetăţeanu* (lic., Şincai), *C. C. Cetate* (col. Craiova), *N. I. Cristea* (lic., Blaj), *I. D. Diaconescu* (lic., T.-Severin), *H. S. Dăscălescu* (Focşani), *B. Georgescu* (col., Craiova), *I. N. Gligor* (lic., Arad), *C. I. Jidanu* (lic., Beiuş), *I. I. Luca, A. C. Mihăileanu* (lic., Arad), *C. Moldovan* (Tg.-Mureş), *E. D. Papadopol* (lic., Bacău), *C. V. Saegiu* (Cluj), *P. Simon* (lic., Arad), *I. Slavov* (Bolgrad), *N. I. Staicu* (lic. Milit., M-rea Dealu), *I. I. Stamate* (Lugoj), *Slt. M. Ştefănescu* (Alba-Iulia), *M. D Stoenescu* (lic. Milit., M-rea Dealu), *A. Tătaru* (lic., Orăştie), *E. Vijelie* (lic. Milit., M-rea Dealu).

Soluţia II-a dată de d-l *Tilică C. Ştefan* (Tâmna). Din relaţia

$$a+b-c=abc$$

deducem

$$c=\frac{a+b}{1+ab}$$

înlocuim

$$a=\frac{x^2+y}{x^2-y},\qquad b=\frac{y^2+x}{y^2-x}$$

şi avem

$$a+b=\frac{2xy(xy-1)}{(x^2-y)(y^2-x)}$$

$$1+ab=\frac{2xy(xy+1)}{(x^2-y)(y^2-x)}$$

deci

$$c=\frac{xy-1}{xy+1} \qquad .c.t.a.$$

Observare făcută de d-l *T. C. Ştefan.* Identitatea de faţă are ca suport identitatea trigonometrică

$$\operatorname{tg}(45^0+\alpha)+\operatorname{tg}(45^0+\beta)-\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\frac{\operatorname{tg}(45^0+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(45^0+\beta)\cdot(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

cum uşor se poate verifica.

Problema 1684. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\sqrt{x}=a$$

şi să se verifice soluţiile pentru $a=\pm 1$ *şi* $a=2$.

LT. C. D. IONESCU-ŢIU

Scriem ecuaţia sub forma

$$\sqrt{x(x+1)}-\sqrt{x(x-1)}=a$$

şi ridicăm la patrat

$$2x^2-2x\sqrt{x^2-1}=a^2 \quad {}^{*}_{*}\quad -2x\sqrt{x^2-1}=a^2-2x^2.$$

O nouă ridicare la patrat, dă

$$4a^2x^2-4x^2=a^4$$

de unde

$$x=\pm\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-1}}.$$

Observări: 1) din cauza diferitelor ridicări la patrat, valoarea precedentă a lui x verifică şi ecuaţiile

$$\pm\sqrt{x(x+1)}\pm\sqrt{x(x-1)}=a$$

astfel că nu e suficient să-l aflăm pe x din formulă, ci trebue să verificăm valoarea:

2) dacă $x>0$ primul radical e mai mare ca al doilea, deci $a>0$; la fel $x<0$ pentru $a<0$;

3) x este real pentru $a\leqq 1, a\geqq -1$;

4) a este real când produsele

$$x(x+1) \text{ şi } x(x-1)$$

sunt pozitive amândouă deci $x\leqq 1, x\geqq -1$.

Verificări: pentru $a=\pm 1$ aflăm $x=\pm\infty$ cu observaţia dela 2; rămâne să vedem dacă ele verifică ecuaţia dată; expresia

$$E=\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$$

amplificată cu

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$$

devine

$$E=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{\pm 2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

şi $\lim\limits_{x=\infty} E=\pm 1$ [1].

Pentru $a=2$, aflăm $x=2/\sqrt{3}=2\sqrt{3}/3=1,154$.

[1]) Semnul $\pm$ este justificat prin scoaterea în factor comun dela numitor a lui $\pm\sqrt{x}$.

Să verificăm ecuaţia; avem întâi

$$e=\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{1,154\times 2,154}$$

$$2\log e=0,06221+0,33325=0,39546$$

$$\log e=0,19773 \quad {}^{*}_{*}\quad e=1,577$$

şi analog

$$f=\sqrt{x(x-1)}=\sqrt{1,154\times 0,154}$$

$$2\log f=0,06221+\bar{1},18752=\bar{1},24973$$

$$\log f=\bar{1},62486 \quad {}^{*}_{*}\quad f=0,422$$

deci

$$e-f=1,155$$

prin urmare $x=2\sqrt{3}$ *nu verifică* ecuaţia; ea este însă o rădăcină pentru ecuaţia

$$e+f=2.$$

$${}^{*}_{*}\quad \sqrt{x(x+1)}+\sqrt{x(x-1)}=2.$$

Observare. 1. Foarte bune soluţii date de d-nii: *Iacob Slavov* (Bolgrad), *Mirel D Stoenescu* (lic. Mil., M-rea Dealu) şi *Tilică C. Ştefan* (Tâmna).

2. D-l *M. D. Stoenescu* verifică soluţia $x=2\sqrt{3}$, transformând radicalii dubli în radicali simpli

$$\sqrt{x\pm 1}=\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}\pm 1}{\sqrt{2}}$$

atunci

$$E=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\neq 2$$

se obţine valoarea 2 când se ia semnul + între fracţiile din paranteză.

3. Au fost înlăturate numeroase soluţii neriguroase.

N. M.

Problema 1702. — *Dacă* A, B *sunt conjugate armonic faţă de* C, D *avem*

$$\frac{BC-BD}{BC+BD}=\frac{CA}{CB}=-\frac{DA}{DB}=\frac{AC+AD}{AC-AD}.$$

N. N. MIHAILEANU

Din relaţia de definiţie — rapoartele II, III egale — aplicând proprietăţile rapoartelor avem

$$\frac{AC}{BC}=-\frac{AD}{BD}=\frac{AC+AD}{BC-BD}=\frac{AC-AD}{BC+BD}$$

care sunt chiar relaţiile de demonstrat, fiindcă

$$BC-BD=AC-AD=DC.$$

Bune soluţii date de d-nii: *N. N. Aniţescu, Dinu D. Buznea* (lic. Milit, M-rea Dealu), *Tilică C. Ştefan* (Tâmna), *Mirel D. Stoenescu* (lic. Milit., M-rea Dealu).

Soluţii analitice date d-nii: *I. D. Diaconescu* (lic., T.-Severin) şi *O. Mureşan* (lic., Arad).

Numeroase soluţii au fost anulate, ca neriguroase.

Problema 1864. — *Se cere graficul configuraţiei reprezentate parametric prin ecuaţiile:*

$$\begin{cases} x = (2x-3)\,cp\,\alpha \\ y = (2x-3)\,sp\,\alpha. \end{cases}$$

V. ALACI

Soluţia dată de d-l profesor *Eugen Vişa:*

Rezolvind ecuaţiile date în raport cu x şi y, obţinem ecuaţiile echivalente:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{3\,cp\,\alpha}{2\,cp\,\alpha - 1} \\ y = \dfrac{3\,sp\,\alpha}{2\,cp\,\alpha - 1}. \end{cases}$$

Asupra ecuaţiilor (1) avem de observat în primul rând că, prin schimbarea lui α în $-\alpha$, x rămâne neschimbat, iar y schimbă numai de semn, ceeace ne spune că axa x-ilor este o axă de simetrie pentru configuraţia cerută.

Va fi suficient atunci să studiem efectiv această configuraţie numai pentru $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ şi pentru $\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \pi$.

In felul acesta, avem precum urmează.

1°. *Cazul:* $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$. In acest caz avem după cum se ştie:

$$(2)\qquad cp\,\alpha + sp\,\alpha = 1$$

aşa încât, eliminând pe α între ecuaţiile (1) şi relaţia (2), obţinem ecuaţia:

$$(3)\qquad \boxed{x - y - 3 = 0},$$

care în coordonate carteziene reprezintă o dreaptă.

Pentru a vedea ce parte din această dreaptă aparţine efectiv configuraţiei al cărei grafic se cere, trebue să determinăm intervalele în cari pot varia x şi y.

In scopul acesta ne vom raporta la variaţiile *sinusului* şi *cosinusului patratic* în intervalul considerat, variaţii cuprinse în tabloul următor:

α	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$sp\,\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	1
$cp\,\alpha$	1	$\frac{1}{2}$	0

pe care îl extragem din tabloul general al D-lui Prof. *V. Alaci* dat în lucrarea D-sale *„Trigonometria patratică"* la pag. 5.

Ţinând seama de acest tablou, deducem cu uşurinţă că variaţiile corespunzătoare ale coordonatelor x şi y date de (1) sunt cele înscrise în tabloul de mai jos:

α	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
x	3	$\pm\infty$	0
y	0	$\pm\infty$	-3

Se vede astfel că nu putem avea în acelaş timp decât:

$$(4)\quad \begin{cases} 3 \leqq x \leqq \infty \\ 0 \leqq y \leqq \infty, \end{cases} \quad \text{sau:} \quad (5)\quad \begin{cases} -\infty \leqq x \leqq 0 \\ -\infty \leqq y \leqq -3 \end{cases}$$

condiţiuni, de altfel absolut compatibile cu ecuaţia (3), după cum se poate uşor constata.

Conchidem astfel că, dintre punctele dreptei (3), aparţin efectiv configuraţiei cerute numai cele ale căror coordonate satisfac condiţiunilor 4) şi 5), condiţiuni cari se mai pot scrie şi sub forma simplificată

$$(3')\qquad \boxed{\begin{array}{ll} x \geqq 3 & x \leqq 0 \\ \text{şi} & \\ y \geqq 0 & y \leqq -3 \end{array}}$$

2°. *Cazul:* $\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \pi$. In acest al doilea caz avem

$$(6)\qquad sp\,\alpha - cp\,\alpha = 1$$

relaţie care, în virtutea ecuaţiilor (1), se scrie

$$(7)\qquad \boxed{3x - y - 3 = 0}.$$

Relaţia (7) constitue astfel ecuaţia carteziană a unei a doua drepte. Să vedem şi de astă dată ce parte a ei aparţine configuraţiei cerute.

Tabloul de variaţie al *sinusului* şi *cosinusului patratic* pentru acest caz este

α	$\frac{\pi}{2}$	$3\frac{\pi}{4}$	π
$sp\,\alpha$	1	$\frac{1}{2}$	0
$cp\,\alpha$	0	$-\frac{1}{2}$	-1

iar tabloul corespunzător pentru variaţia coordonatelor x şi y va fi

α	$\frac{\pi}{2}$	$3\frac{\pi}{4}$	π
x	1	$-\frac{3}{4}$	1
y	-3	$-\frac{3}{4}$	0

.

Se vede astfel că în cel mai bun caz nu putem avea decât

$$(8)\qquad \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{3}{4} \\ -3 \leq y \leq -\frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{sau}$$

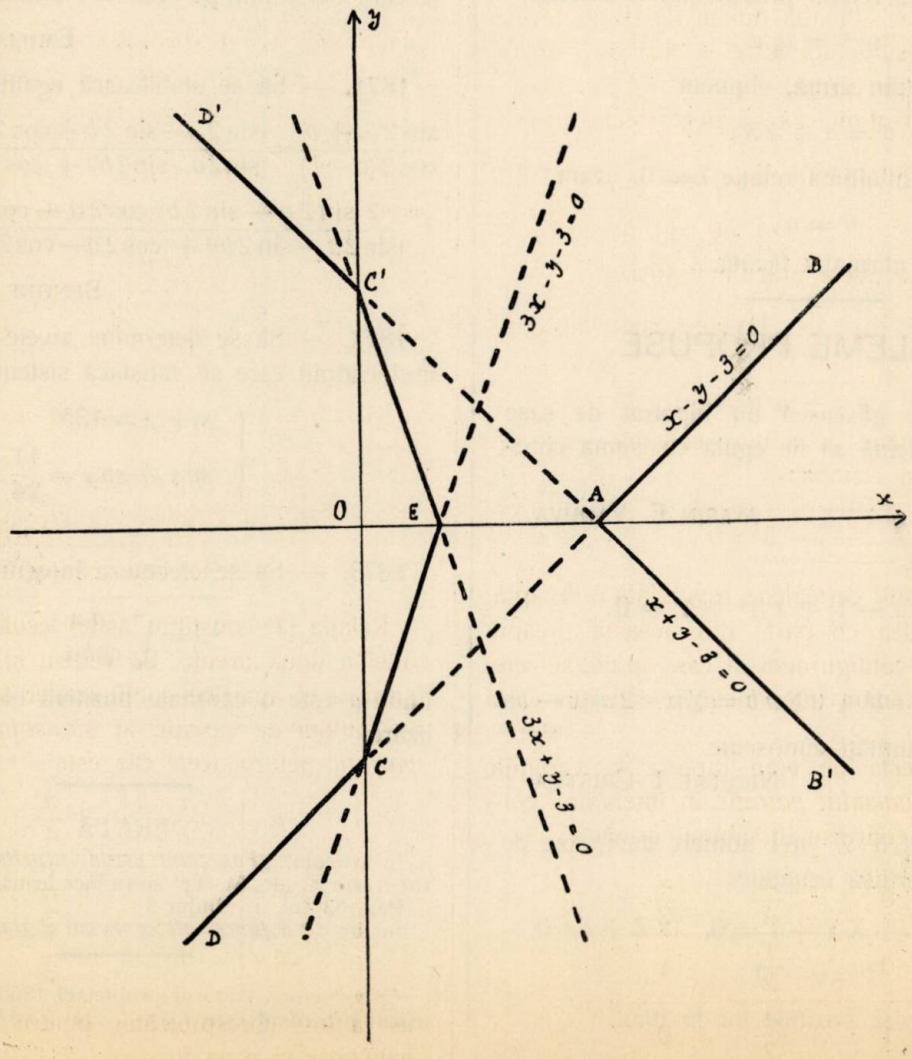
$$(9)\qquad \begin{cases} \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \\ -\frac{3}{4} \leq y \leq 0, \end{cases}$$

condiţiuni cari se constată că la rândul lor sunt perfect compatibile cu ecuaţia (7).

Conchidem deci că dintre punctele dreptei (7) aparţin efectiv configuraţiei numai cele ale căror coordonate satisfac condiţiunile de mai sus şi cari se mai pot scrie simplificat sub forma

$$(7')\qquad \boxed{\begin{array}{c} 0 \leq x \leq 1 \\ -3 \leq y \leq 0 \end{array}}.$$

Construind acum dreptele de ecuaţii (3) şi (7) din cari vom reţine însă numai porţiunile caracterizate analitic respectiv prin condiţiunile (3') şi (7') şi luând apoi simetricele acestor porţiuni faţă de axa x-ilor, obţinem graficul complect al configuraţiei cerute, grafic ce prezintă aspectul din figură de mai jos.



Graficul cerut este astfel format din semidreptele A B, A B′, C D, C′ D′ *şi din segmentele* C E, C′ E.

Observaţie. Se poate uşor învedera că parametrul unghiular α, corespunzător unui punct P al configuraţiei, este tocmai unghiul polar al acelui punct.

In adevăr, presupunând că unghiul polar al punctului P ar fi diferit de α, să-l notăm cu θ.

Or, se ştie că unghiul θ se exprimă în funcţie de coordonatele carteziene x şi y ale punctului P prin relaţia

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

şi cum, pe de altă parte, din împărţirea relaţiilor (1) mai avem că

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha,$$

prin comparaţie cu relaţia precedentă, deducem:

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\alpha$$

de unde, în cele din urmă, obţinem

$$\theta = \alpha + k\pi.$$

Făcând acum în ultima relaţie $k = 0$, avem

$$\theta = \alpha,$$

ceeace dovedeşte afirmaţia făcută.

PROBLEME PROPUSE

1866. — Să se găsească un bipatrat de şase cifre a cărui rădăcină să fie egală cu suma cifrelor lui.

MARIN F. VADUVA

1867. — Dacă,

$$2y(y - x - 1) + x(y^2 + 1) = 0,$$

avem relaţia

$$3x^2y^4 - xy\Sigma(2a+b) + 2\Sigma ab = \Sigma(x-2a)(x-b),$$

a, b şi c fiind cantităţi cunoscute.

NICULAE I. CRISTEA

1868. — Fie X, Y, Z, trei numere complexe de modul 1, care verifică ecuaţiile:

$$2XZ = \sqrt{3} + i, \quad XY + 1 = 0, \quad YZ + i = 0,$$
$$(i = \sqrt{-1}).$$

1°. Să se figureze poziţiile lor în plan.

2°. Să se arate că între laturile triunghiului X Y Z astfel format, există relaţia:

$$\overline{XZ}(\overline{XY} + 1) = 2\overline{YZ}.$$

MIHU CERCHEZ

1869. — Pe latura Ox a unghiului drept xOy se ia punctul fix A şi punctul mobil M, iar pe latura Oy se ia punctul fix B şi punctul mobil N. Se complectează dreptunghiul M O N P şi se cere locul lui P şi variaţia suprafeţei acestui dreptunghiu când unghiul dreptelor B M şi A N este constant. Să se examineze cazul particular când B M şi A N sunt paralele.

G-L GH. BUICLIU

1870. — Să se găsească locul geometric al centrelor cercurilor tangente laturei unui unghiu dat şi care determină pe cealaltă latură un segment dat.

EMILIAN MEREUTA

1871. — Să se stabilească egalitatea:

$$\frac{\sin 2(a+b)}{\cos 2(a-b)} = \frac{(\sin 2a - \sin 2b + \cos 2b - \cos 2a)^2}{(\sin 2a - \sin 2b)^2 + (\cos 2a - \cos 2b^2)} + \frac{2(\sin 2a - \sin 2b)(\cos 2a - \cos 2b)}{(\sin 2a - \sin 2b)^2 + (\cos 2a - \cos 2b)^2 - 2} - 1.$$

BENONE GEORGESCU

1872. — Să se determine arcele x şi y din primul cadran care să satisfacă sistemul:

$$\begin{cases} x + y = 135^0 \\ sp\, x + sp\, y = \dfrac{11}{24} \end{cases}$$

V. ALACI

1873. — Să se efectueze integrala definită:

$$J = \int_0^a \frac{dx}{cph\, x},$$

unde a este o cantitate pozitivă oarecare. Generalizare.

EUGEN VISA

ERATA

In articolul „*Funcţiuni pseudo-hiperbolice*“ din numărul trecut al „R. M. T.“ se va face următoarea îndreptare:

Pag. 63 col. I. rândul 5:

In loc de *a funcţiunii* se va citi *al graficului funcţiunii.*

Complectare. Autorul problemei 1860 publicată în numărul precedent este, Căp. *I. Gh. Zamfirescu.*

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Bakonyi C. (P., 1511, 1659, 1807, 1810, 1817, 1818, 1819); *Cristea I. Nicolae* (P., 1698, 1702, 1766, 1775, 1779, 1790, 1791, 1794, 1799, 1810, 1815, 1817, 1827, 1834, 1837, 1839, 1840, 1855, 1856, 1859, 1862, 1863); *Facsko I. Gheorghe* (1752, 1760, 1768, 1777, 1799, 1817); *Negrea Mircea* (1828, 1829, 1837, 1839, 1840, 1846, 1848); *Papadopol-Demetra Elena* (1564, 1574, 1596, 1687, 1817, 1834, 1856, 1859), *Popescu N. Corneliu* (1844, 1846); *Radoslov I.* (1827, 1830, 1833, 1834, 1845); *Rusu L. Mircea* (1494, 1511, 1516, 1786, 1823); *Schapira Solo* (1659, 1665, 1690, 1752, 1817); *Şenchi Eugen* (P.) *Stamate I. Ionel* (P); *Stefanovici I. Mircea* (1834); *Ţarălungă Savel* (P., 1760, 1827, 1842, 1845, 1858, 1859); *Vasiliev Andrei Boris* (1842); *Văduva F. Maria* (1826, 1827, 1834, 1845); *Zamfirescu Gh.* (N. P).

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait a Buenos Aires et dont les collaborations se publient en Allemand, Anglais, Espagnol Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié: 286 articles, 249 notes et 1892 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIII, s'a primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Prof. Ion Rizescu.* Str. Mihăileanu 18, Constanţa.
2. *Prof. Constantin Borş.* Str. Petru Rareş 85, Piatra Neamţ.
3. D-l *Marin I. Popa,* Licenţiat în Matematici. Bulevardul Alexandru I. Cuza 20, Bucureşti II.
4. *Dr. Michail St. Botez,* profesor, Str. I. G. Duca 15, Piatra Neamţ.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XIX, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care ev tual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Figurile ce însotesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

A apărut volumul:

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ

de

VALERIU ALACI

Profesor, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Lucrarea premiată de „ACADEMIA ROMÂNĂ"

272 pagini — Preţul: 180 Lei.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XIX, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

ANUL XX SEPTEMVRIE 1940 No 7.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **M. V. THÉBAULT**: OCTOGONE BORDÉ DE CARRÉS.
2. NOTE MATEMATICE: 15, 16.
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 406, 1596, 1655, 1677, 1751, 1775.
5. PROBLEME PROPUSE: 1874-1881.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XX, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIX inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XX — No 7 TIMISOARA, SEPTEMVRIE 1940

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

OCTOGONE BORDÉ DE CARRÉS

PAR M. V. THÉBAULT
(LE MANS, FRANCE).

1. Sur les côtés A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_7, A_7A_8, A_8A_1 d'un octogone convexe $(O)\equiv A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, on construit extérieurement les carrés de centres C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8 et intérieurement les carrés dont les centres sont C_1', C_2', C_3', C_4', C_5', C_6', C_7', C_8'. Les sommets C_1, C_3, C_5, C_7 du quadrangle $C_1C_3C_5C_7$ étant les centres des carrés construits extérieurement sur deux côtés opposés des quadrangles $A_1A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5A_6$, $A_5A_6A_7A_8$, $A_7A_8A_1A_2$, on a succesivement[1])

$$2\,\overline{C_1C_3}^2=\overline{A_1A_3}^2+\overline{A_2A_4}^2+4\,\overline{A_1A_2A_3A_4}$$
$$2\,\overline{C_3C_5}^2=\overline{A_3A_5}^2+\overline{A_4A_6}^2+4\,\overline{A_3A_4A_5A_6}$$
$$2\,\overline{C_5C_7}^2=\overline{A_5A_7}^2+\overline{A_6A_8}^2+4\,\overline{A_5A_6A_7A_8}$$
$$(1)\qquad 2\,\overline{C_7C_1}^2=\overline{A_7A_1}^2+\overline{A_8A_2}^2+4\,\overline{A_7A_8A_1A_2}$$

et

$$2\,\overline{C_1C_5}^2=\overline{A_2A_6}^2+\overline{A_1A_5}^2+4\,\overline{A_1A_2A_5A_6}$$
$$2\,\overline{C_3C_7}^2=\overline{A_4A_8}^2+\overline{A_3A_7}^2+4\,\overline{A_3A_4A_7A_8}.$$

Par analogie,

$$2\,\overline{C_2C_4}^2=\overline{A_2A_4}^2+\overline{A_3A_5}^2+4\,\overline{A_2A_3A_4A_5}$$
$$2\,\overline{C_4C_6}^2=\overline{A_4A_6}^2+\overline{A_5A_7}^2+4\,\overline{A_4A_5A_6A_7}$$
$$2\,\overline{C_6C_8}^2=\overline{A_6A_8}^2+\overline{A_7A_1}^2+4\,\overline{A_6A_7A_8A_1}$$
$$(2)\qquad 2\,\overline{C_8C_2}^2=\overline{A_8A_2}^2+\overline{A_1A_3}^2+4\,\overline{A_8A_1A_2A_3}$$

et

$$2\,\overline{C_2C_6}^2=\overline{A_2A_6}^2+\overline{A_3A_7}^2+4\,\overline{A_2A_3A_6A_7}$$
$$2\,\overline{C_4C_8}^2=\overline{A_1A_5}^2+\overline{A_4A_8}^2+4\,\overline{A_1A_4A_5A_8}.$$

[1]) Cfr. *V. Thébault, Associations française pour l'Avancement des Sciences (A. F. A. S.)*, 1932–89.

Observant que

$$\overline{A_1A_2A_3A_4}+\overline{A_1A_4A_5A_8}+\overline{A_5A_6A_7A_8}=\overline{A_3A_4A_5A_6}+$$
$$\overline{A_2A_3A_6A_7}+\overline{A_7A_8A_1A_2}=\overline{A_2A_3A_4A_5}+\overline{A_1A_2A_5A_6}+$$
$$\overline{A_6A_7A_8A_1}=\overline{A_4A_5A_6A_7}+\overline{A_3A_4A_7A_8}+\overline{A_8A_1A_2A_3}=$$
$$\overline{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8}=S,$$

on a donc, en vertu d'un théorème classique relatif à la somme des carrés des côtés d'un quadrilatére,

$$(3)\qquad \begin{aligned}&\overline{C_1C_3}^2+\overline{C_3C_5}^2+\overline{C_5C_7}^2+\overline{C_2C_6}^2+\overline{C_4C_8}^2=\\&\overline{C_1C_5}^2+\overline{C_3C_7}^2+\overline{C_2C_6}^2+\overline{C_4C_8}^2-4\,\overline{EG}^2=\\&\overline{C_2C_4}^2+\overline{C_4C_6}^2+\overline{C_6C_8}^2+\overline{C_8C_2}^2+\overline{C_1C_5}^2+\overline{C_3C_7}^2\\&=\overline{C_2C_6}^2+\overline{C_4C_8}^2-4\,\overline{FH}^2+\overline{C_1C_5}^2+\overline{C_3C_7}^2;\end{aligned}$$

de sorte que $EG=FH$, E, G, F, H étant les milieux des diagonales C_1C_5, C_3C_7, C_2C_6, C_4C_8 des quadrangles $C_1C_3C_5C_7$ et $C_2C_4C_6C_8$.

Les diagonales EG *et* FH *du quadrangle* EFGH *sont donc égales.* Nous allons montrer qu'elles sont rectangulaires — autrement dit que l'on a

$$(4)\qquad \overline{EF}^2+\overline{GH}^2=\overline{FG}^2+\overline{HE}^2$$

ou

$$\overline{C_1C_2}^2+\overline{C_2C_5}^2+\overline{C_5C_6}^2+\overline{C_6C_7}^2-(\overline{C_1C_5}^2+\overline{C_2C_6}^2)+$$
$$\overline{C_3C_4}^2+\overline{C_4C_7}^2+\overline{C_7C_8}^2+\overline{C_8C_3}^2-(\overline{C_3C_7}^2+\overline{C_4C_8}^2)=$$
$$\overline{C_2C_3}^2+\overline{C_3C_6}^2+\overline{C_6C_7}^2+\overline{C_7C_2}^2-(\overline{C_2C_6}^2+\overline{C_3C_7}^2)+$$
$$\overline{C_1C_4}^2+\overline{C_4C_5}^2+\overline{C_5C_8}^2+\overline{C_8C_1}^2-(\overline{C_1C_5}^2+\overline{C_4C_8}^2),$$

ou enfin

$$(5)\qquad \begin{aligned}&\overline{C_1C_2}^2+\overline{C_3C_4}^2+\overline{C_5C_6}^2+\overline{C_7C_8}^2+\overline{C_2C_5}^2+\overline{C_4C_7}^2\\&+\overline{C_6C_1}^2+\overline{C_8C_3}^2=\overline{C_2C_3}^2+\overline{C_4C_5}^2+\overline{C_6C_7}^2+\\&\overline{C_8C_1}^2+\overline{C_1C_4}^2+\overline{C_3C_6}^2+\overline{C_5C_8}^2+\overline{C_7C_2}^2.\end{aligned}$$

Or, invoquant la formule qui exprime la distance des centres des carrés construits extérieurement sur deux côtés d'un triangle[1], on obtient les relations

$$2\,\overline{C_1C_2^2} = \overline{A_1A_2^2} + \overline{A_2A_3^2} + 4\,\overline{A_1A_2A_3}$$

$$2\,\overline{C_2C_5^2} = \overline{A_2A_5^2} + \overline{A_3A_6^2} + 4\,\overline{A_2A_3A_5A_6}$$

. . . . . .

$$2\,\overline{C_2C_3^2} = \overline{A_2A_3^2} + \overline{A_3A_4^2} + 4\,\overline{A_2A_3A_4}$$

$$2\,\overline{C_3C_6^2} = \overline{A_3A_6^2} + \overline{A_4A_7^2} + 4\,A_3A_4A_6A_7,$$

. . . . . .

qui justifient l'égalité (5).

Ces raisonnements s'appliquent textuellement à la figure constituée par l'octogone (O) et les carrés construits intérieurement sur ses côtés; il suffit de remplacer le signe + par — devant les aires contenues dans les égalités (1) et (2) pour avoir les expressions des carrés des distances $C_1'C_3'$, $C_3'C_5'$, ...

Dès lors, *dans un octogone convexe, les milieux des diagonales principales du polygone dont les sommets coïncident avec les centres des carrés construits extérieurement* (ou intérieurement) *sur les côtés, sont les sommets d'un pseudo-carré.*

N. B. Des égalités (3) et (5) découlent les propositions suivantes:

a, La somme des carrés des côtés de l'un des quadrangles $C_1C_3C_5C_7$, $C_2C_4C_6C_8$, *diminuée de la somme des carrés des diagonales de l'autre, est constante pour le deux quadrangles.*

b. Dans l'ortogone $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8$, *la somme des carrés des côtés de rang impair,* C_1C_3,..., *augmentée de la somme des carrés des diagonales, joignant les sommets de quatre en quatre, de rang pair,* C_2C_5, ..., *est égale à la somme des carrés des côtés de rang pair* C_2C_4, ..., *augmenté de celle des diagonales de rang impair,* C_1C_4, ...

c. Les barycentres des sommets des octogones $C_1C_2\ldots C_8$, $C_1'C_2'\ldots C_8'$ et des quadrangles EFGH, E'F'G'H' coïncident avec le barycentre de l'octogone fondamental (O).

2. Sur les côtés BC, CD, DA, AB d'un quadrangle convexe ABCD, on construit extérieurement les carrés ABA_2A_1, BCA_4A_3, CDA_6A_5, DAA_8A_7 de centres A_1', A_3', A_5', A_7'.

Soient A_2', A_4', A_6', A_8' les centres des carrés construits intérieurement sur les segments rectilignes A_2A_3, A_4A_5, A_6A_7, A_8A_1. Les points A_1', A_2', ..., A_7', A_8' sont les centres des carrés construits intérieurement sur les côtés de l'octogone $A_1A_2\ldots A_8$, de sorte que si E, F, G, H sont les milieux des diagonales principales $A_1'A_5'$, $A_2'A_6'$, A_3', A_7', $A_4'A_8'$ du polygone $A_1'A_2'\ldots A_8'$, *le quadrangle* EFGH *est un* pseudo-carré *dans lequel* EG = FH. Mais, le point E coïncide avec le barycentre des points A_1' et A_5' comme le point G est le barycentre des points A_3' et A_7' et le milieu Ω du segment rectiligne EG coïncide avec le barycentre des sommets du pseudo-carré $A_1'A_3'A_5'A_7'$ et, par suite, des sommets A, B, C, D du quadrangle fondamental.

En outre, les points X, Y, Z, V étant les milieux des segments rectilignes A_2A_3, A_4A_5, A_6A_7, A_8A_1, on sait que le quadrangle XYZV est un pseudo-carré dont les diagonales XZ et YV passent respectivement aux milieux H, F des diagonales BD et AC du quadrangle ABCD, c'est-à-dire aux milieux des distances $A_4'A_8'$ et $A_1'A_6'$ des centres des carrés construits intérieurement sur A_2A_3, A_4A_5, A_6A_7, A_8A_1.[1] Dès lors, comme le barycentre Ω des sommets A, B, C, D du quadrangle ABCD est situé au milieu de FH, *les milieux* E, F, G, H *des diagonales principales de l'ortogone* $A_1'A_2'\ldots A_8'$ *sont les sommets d'un carré dont une des diagonales coïncide avec le segment rectiligne unissant les milieux des diagonales du quadrangle fondamental* ABCD.

Si A_1'', A_2'', A_3'', ..., A_8'' sont les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés de l'octogone $A_1A_2\ldots A_8$, les milieux E'G' et F'H' des diagonales principales $A_1''A_6''$, $A_3''A_7''$ et $A_2''A_6''$, $A_4''A_8''$ sont aussi les sommets d'un carré de centre Ω transformé de carré EFGH par l'homothétie $(\Omega, 3)$.

En effet, les points A_1' et A_1'', A_3' et A_3'', par exemple, décrivent des divisions semblables sur les médiatrices des côtés opposés AB, CD du qua-

[1]) Cfr. *J. Neuberg, A. F. A. S.* 1893—26

[1]) *V. Thébault, Mathesis,* 1923—350.

drangle A B C D et les milieux des segments rectilignes $A_1' A_3'$, $A_1'' A_3''$ sont collinéaires avec le milieu Ω de la distance des milieux A_m et C_m des côtés A B et C D; de plus,

$$\Omega E : \Omega E' = A_m A_1' : A_m A_1'' = 1 : 3.$$

N. B. Les diagonales X Z et Y V, $A_1' A_5'$ et $A_3' A_7'$ des pseudo-carrés X Y Z V et $A_1' A_3' A_5' A_7'$ concourent en un point Q[1], de sorte que ce point est sur le cercle circonscrit au carré E F G H.

NOTE MATEMATICE

15. — *Sur la formation des carrés semi-magiques à produits.*

Dans son article „Carrés à produits magiques", v. R. M. Timişoara, 1939, No. 4, page 49, Monsieur le Dr. *Erich Stern* d'Amsterdam, propose de nommer *carrés semi-magiques à produits* ceux pour lesquels les produits des éléments des rangées (lignes ou colonnes, à l'exclusion de ceux des éléments placés sur les diagonales) sont égaux. Le théorème suivant permet de former de tels carrés au cas où le nombre des cases est impair. Il s'agit évidemment de donner une solution en nombres entiers.

Théorème. Étant donnés 2 séries de nombres entiers a_i, b_j vérifiant les relations

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^p = \sum_{i=1}^{n} b_i^p$$

pour toutes les valeurs entières de l'éxposant p de 1 à $n-1$, n étant impair, si l'on forme ensuite les différences $a_i - b_j$, on aura

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i - b_j) = \prod_{j=1}^{n} (a_i - b_j).$$

Démonstration. On sait que si les a_i, b_j vérifient les relations

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^p = \sum_{j=1}^{n} b_j^p \qquad (p = 1, 2 \ldots n-1),$$

et si on les considère comme racines de 2 équations algébriques de degré n, ces deux équations (dans lesquelles nous supposons que le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue est l'unité) ne diffèrent que par le terme connu (voir p. ex. „Sur les égalités multigrades", par *A. Gloden*, page 17). Si nous désignons ces équations par

$$X(a_i) = 0 \text{ et } Y(b_i) = 0,$$

et si nous attribuons à l'inconnue une même valeur c dans les premiers membres des 2 équations, nous aurons

$$X(c) - Y(c) = d,$$

d étant une constante.

Si, dans cette dernière relation, nous donnons à c successivement les valeurs a_i ou b_j, nous trouvons

$$-Y(a_i) = d \quad \text{et}$$

$$X(b_j) = d, \quad \text{car } X(a_i) = Y(b_i) = 0.$$

Or, les polynômes X et Y, en raison des hypothèses faites sur leurs racines, peuvent être représentés par

$$X \equiv (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$$

$$Y \equiv (y - b_1)(y - b_1) \ldots (y - b_n),$$

donc

$$X(b_j) \equiv (b_j - a_1)(b_j - a_2) \ldots (b_j - a_n) \equiv \prod_{i=1}^{n} (b_j - a_i) = d.$$

$$Y(a_i) \equiv (a_i - b_1)(a_i - b_2) \ldots (a_i - b_n) \equiv \prod_{j=1}^{n} (a_i - b_j) = -d.$$

Si nous considérons maintenant le produit

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i - b_j),$$

il sera égal à $(-1)^n d$, c'est-à-dire, égal au produit

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_j)$$

au cas où n est impair.

Exemples. Nous emploierons, pour représenter le système

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^p = \sum_{i=1}^{n} b_j^p, \qquad p = 1, 2 \ldots n-1$$

$$a_1, a_2 \ldots a_n \overset{n-1}{=} b_1, b_2 \ldots b_n.$$

[1]) *V. Thébault, Mathesis,* loc. cit.

a. 1, 10, 14 $\overset{2}{=}$ 4, 5, 16

3	−6	−10
4	−5	−9
15	6	−2

$3(-6)(-10) = 4(-5)(-9) = 15.6(-2) =$
$3.4.15 = (-6)(-5)6 = (-10)(-9)(-2)(=180).$

b. 2, 3, 11, 15, 19 $\overset{4}{=}$ 1, 5, 9, 17, 18.

−1	−2	−10	−14	−18
3	2	−6	−10	−14
7	6	−2	−6	−10
15	14	6	+2	−2
16	15	7	3	−1

Produit semi-magique = — 5.040.

c. 1, 19, 28, 59, 65, 90, 102 $\overset{6}{=}$ 2, 14, 39, 45, 76, 85, 103

1	−17	−26	−57	−63	−88	−100
13	−5	−14	−45	−51	−76	−88
38	20	11	−20	−26	−51	−63
44	26	17	−14	−20	−45	−57
75	57	48	17	+11	−14	−26
84	66	57	26	20	−5	−17
102	84	75	44	38	13	1

Produit semi-magique = + 13.967.553.600.

On peut obtenir, à l'aide des formules données dans mon livre déjà cité sur les multigrades, des solutions paramétriques. Toutefois ce procédé donne toujours lieu à des solutions en nombres positifs et négatifs.

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

---

16. — *Asupra paralelogramelor circumscrise unei elipse.*

Fie elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

raportată la axele sale $AA' = 2a$, $BB' = 2b$ şi două direcţii în planul ei de coeficienţi unghiulari m şi m_1. Ecuaţiile tangentelor la elipsă paralele cu direcţiile date sunt:

(1) $$y = m\,x + \sqrt{b^2 + a^2 m^2}$$

(2) $$y = m\,x - \sqrt{b^2 + a^2 m^2}$$

(3) $$y = m_1 x + \sqrt{b^2 + a^2 m_1^2}$$

(4) $$y = m_1 x - \sqrt{b^2 + a^2 m_1^2}.$$

Intersecţiile lor două câte două ne dau un paralelogram circumscris elipsei. Să notăm cu P, P′, Q, Q′ vârfurile lui, ale căror coordonate se obţin rezolvând respectiv sistemele: (1), (3); (2), (4); (1), (4) şi (2), (3). Primim astfel:

$$\text{P}\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{b^2 + a^2 m_1^2} - \sqrt{b^2 + a^2 m^2}}{m - m_1} \\ y = \dfrac{m\sqrt{b^2 + a^2 m_1^2} - m_1\sqrt{b^2 + a^2 m^2}}{m - m_1} \end{cases}$$

$$\text{P}'\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{b^2 + a^2 m^2} - \sqrt{b^2 + a^2 m_1^2}}{m - m_1} \\ y = \dfrac{m_1\sqrt{b^2 + a^2 m^2} - m\sqrt{b^2 + a^2 m_1^2}}{m - m_1} \end{cases}$$

$$\text{Q}\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{b^2 + a^2 m^2} + \sqrt{b^2 + a^2 m_1^2}}{m_1 - m} \\ y = \dfrac{m\sqrt{b^2 + a^2 m_1^2} + m_1\sqrt{b^2 + a^2 m^2}}{m_1 - m} \end{cases}$$

$$\text{Q}'\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{b^2 + a^2 m^2} + \sqrt{b^2 + a^2 m_1^2}}{m - m_1} \\ y = \dfrac{m\sqrt{b^2 + a^2 m_1^2} + m_1\sqrt{b^2 + a^2 m^2}}{m - m_1} \end{cases}$$

După cum se observă, centrul elipsei este şi centrul paralelogramului m şi m_1 putând lua dife-

rite valori, urmează că unei elipse îi putem circumscrie o infinitate de paralelograme.

Condiția ca paralelogramul circumscris să fie romb. Pentru aceasta trebue ca diagonalele lui să fie perpendiculare. Notând cu μ și μ' coeficienții unghiulari ai diagonalelor P P' și Q Q' avem:

$$\mu = \frac{m_1 \sqrt{b^2 + a^2 m^2} - m \sqrt{b^2 + a^2 m_1^2}}{\sqrt{b^2 + a^2 m^2} - \sqrt{b^2 + a^2 m_1^2}}$$

$$\mu' = \frac{m \sqrt{b^2 + a^2 m_1^2} + m_1 \sqrt{b^2 + a^2 m^2}}{\sqrt{b^2 + a^2 m^2} + \sqrt{b^2 + a^2 m_1^2}}.$$

Condiția de perpendicularitate

$$\mu \mu' + 1 = 0$$

ne dă

$$(b^2 - a^2)(m_1^2 - m^2) = 0 \tag{5}$$

și cum

$$b^2 - a^2 = -c^2 \neq 0,$$

trebue ca

$$m_1^2 - m^2 = 0$$

de unde

$$m_1 = \pm m.$$

Pentru $m_1 = m$ tangentele (3) și (4) se confundă respectiv cu (1) și (2). Acest caz trebue deci exclus. Rămâne cazul $m_1 = -m$. In acest caz, mai trebue să arătăm că diagonalele nu sunt egale, căci atunci am avea un patrat. Lungimile diagonalelor pentru $m_1 = -m$ sunt:

$$P P' = 2 \sqrt{b^2 + a^2 m^2}$$

$$Q Q' = \frac{2 \sqrt{b^2 + a^2 m^2}}{m},$$

adică diferite în general, afară de cazul $m = 1$, când sunt egale și avem deci un patrat.

Așa că laturile rombului circumscris elipsei sunt pe dreptele

$$\begin{cases} y = m x + \sqrt{b^2 + a^2 m^2} \\ y = m x - \sqrt{b^2 + a^2 m^2} \\ y = -m x + \sqrt{b^2 + a^2 m^2} \\ y = -m x - \sqrt{b^2 + a^2 m^2}, \end{cases} \tag{6}$$

cu condiția $m \neq 1$.

Dând lui m diferite valori, urmează că unei elipse se pot circumscrie o infinitate de romburi.

Se mai constată că vârfurile lui sunt pe axele elipsei și simetrice față de centru.

Construcția geometrică a rombului circumscris. Ducem la elipsă o tangentă neparalelă cu bisectoarele axelor și luăm simetricele punctelor ei de intersecție cu axele, în raport cu centrul elipsei. Unind aceste puncte, obținem rombul circumscris.

Cazul $m = 1$. In acest caz rombul devine după cum am văzut, un patrat. Deci un singur patrat se poate circumscrie elipsei, ale cărei laturi se obțin făcând în (6) $m = 1$.

Construcția geometrică a patratului circumscris, rezultă imediat din ecuațiile laturilor. Din centrul elipsei descriem un cerc cu raza $\sqrt{a^2+b^2}$ — semidiagonala dreptunghiului construit pe axe — și unim punctele unde acest cerc întâlnește axele.

Cazul dreptunghiului. Pentru ca figura P Q P' Q' să fie un dreptunghiu, trebue ca diagonalele să fie egale, fără a fi și perpendiculare. Punând condiția ca P P' = Q Q', găsim după un scurt calcul, relația:

$$1 + m m_1 = 0.$$

Deci sunt o infinitate de dreptunghiuri circumscrise elipsei, cu laturile pe dreptele

$$y = m x + \sqrt{b^2 + a^2 m^2}$$

$$y = m x - \sqrt{b^2 + a^2 m^2}$$

$$y = -\frac{1}{m} x + \frac{1}{m} \sqrt{a^2 + b^2 m^2}$$

$$y = -\frac{1}{m} x - \frac{1}{m} \sqrt{a^2 + b^2 m^2}.$$

Observare. Relația (5) care este condiția ca paralelogramul să aibă diagonale perpendiculare, este verificată oricare ar fi m și m_1, dacă $b = a$. Dar în acest caz elipsa devine cerc. Rezultă că unui cerc se pot circumscrie numai paralelograme cu diagonale perpendiculare, adică romburi și patrate.

Aplicații. *Să se găsească locul geometric al vârfurilor dreptunghiurilor circumscrise elipsei.*

Coordonatele unui vârf se obțin înlocuind în formulele coordonatelor date la început, $m_1 = -\frac{1}{m}$.

Să facem substituția în coordonatele lui P și avem:

$$x = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 m^2} - m \sqrt{b^2 + a^2 m^2}}{m^2 + 1}$$

$$y = \frac{m\sqrt{a^2 + b^2 m^2} + \sqrt{b^2 + a^2 m^2}}{m^2 + 1}.$$

Eliminăm pe m şi găsim locul. Ridicând aceste egalităţi la patrat şi adunându-le primim locul

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2,$$

adică cercul cunoscut.

Din cauza simetriei se constată că şi celelalte vârfuri sunt pe acest cerc.

Construcţia geometrică a unui dreptunghiu circumscris elipsei se face deci astfel: descriem cercul cu centrul în centrul elipsei şi cu raza $\sqrt{a^2 + b^2}$, apoi într'un punct a elipsei construim o tangentă care întâlneşte cercul în două puncte; în punctul de pe elipsă simetric punctului de tangenţă în raport cu origina, construim iarăş o tangentă care întâlneşte acelaş cerc în alte două puncte. Unind aceste 4 puncte de pe cerc, obţinem un dreptunghiu circumscris elipsei.

II. *Să se găsească ecuaţiile laturilor rombului circumscris elipsei, ale cărui două vârfuri opuse, se găsesc în punctele unde directoarele elipsei întâlnesc axa sa.*

Ecuaţia unei directoare este $x = \frac{a^2}{c}$. Pentru ca vârful Q să se găsească în punctul de abscisă $x = \frac{a^2}{c}$ de pe axa $2a$ a elipsei, iar simetricul său în raport cu centrul Q' în $x = -\frac{a^2}{c}$, trebue să avem:

$$\frac{\sqrt{b^2 + a^2 m^2} + \sqrt{b^2 + a^2 m_1^2}}{m_1 - m} = \frac{a^2}{c},$$

dar în cazul rombului, $m_1 = -m$, aşa că înlocuind şi raţionalizând, găsim:

$$\frac{b^2 + a^2 m^2}{m^2} = \frac{a^4}{c^2}$$

de unde

$$m = \pm \frac{c}{a}.$$

Deci laturile rombului cerut, se găsesc pe dreptele

$$a y - c x \pm a^2 = 0$$

$$a y + c x \pm a^2 = 0.$$

III. *Dintre toate romburile circumscrise elipsei, să se găsească cel de arie minimă.*

Notând cu S suprafaţa unuia din romburile circumscrise, avem:

$$S = \frac{P P' \cdot Q Q'}{2} = \frac{4(b^2 + a^2 m^2)}{2m} = 2\frac{b^2 + a^2 m^2}{m}.$$

Maximul sau minimul are loc deodată cu al funcţiunii

$$Z = \frac{b^2 + a^2 m^2}{m},$$

de unde derivând

$$Z' = \frac{a^2 m^2 - b^2}{m^2},$$

$Z' = 0$ pentru $m = \pm \frac{b}{a}$.

In intervalul

$$\left(-\frac{b}{a}, +\frac{b}{a}\right), \quad Z' < 0,$$

iar în afară $Z' > 0$.

Aşa că S este maxim pentru $m = -\frac{b}{a}$ şi minim pentru $m = \frac{b}{a}$. Dar pentru $m = -\frac{b}{a}$ avem o arie negativă, aşa că luând pentru arie numai semnul plus, ea este minimă pentru $m = \frac{b}{a}$ şi valoarea minimă este $4ab$.

In cazul romburilor circumscrise unui cerc, cel de arie minimă are valoarea $4R^2$, notând cu R raza cercului.

Laturile rombului de arie minimă circumscris elipsei, are deci laturile pe dreptele

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x + b\sqrt{2} \\ y = \frac{b}{a}x - b\sqrt{2} \\ y = -\frac{b}{a}x + b\sqrt{2} \\ y = -\frac{b}{a}x - b\sqrt{2}. \end{cases}$$

Construcţia lui geometrică se deduce cu uşurinţă. Ducem diagonalele dreptunghiului construit pe axele elipsei; din centrul ei descriem un arc de cerc cu raza egală cu diagonala patratului construit pe semiaxa $2b$; acest arc întâlneşte axa mică $(2b)$ în două

puncte, prin care ducând paralele la diagonalele dreptunghiului, obținem rombul de arie minimă.

Tot astfel s'ar putea studia variația suprafeței dreptunghiurilor circumscrise elipsei.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLV, No. 12, August 1940. Observatorul astronomic Batthyanian din Alba Iulia, de *I. Ionescu*. Despre o curbă specială, de *A. Myller*. Raport pentru decernerea premiului „*Spiru-Haret*". Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

2. *Revue mathématique de l'Union Interbalkanique*, Tome III, Fasc. 1–2, 1940. Continuité et dérivation polydimensionnelle et laplacienne des suites, par *Miron Nicolesco*. Verallgemeinerung eines Blaschkeschen Satzes über konvexe Körper konstanter Breite, von *Alexander Dinghas*. Les lois de probabilité pour les fonctions statistiques (cas de collectifs a plusieurs dimensions), par *Y. Garti*.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 406. — *Din vârfurile* A, B, C *ale unui triunghiu ca centru, se descriu cercuri tangente între ele două câte două. Fie* MN, PQ, RS *tangentele comune exterioare cercurilor* (B, C), (C, A) *și* (A, B). *Fie încă* O_a *centrul cercului tangent cercurilor* B, C *și dreptei* MN; O_b *centrul cercului tangent cercurilor* C, A *și dreptei* PQ; O_c *centrul cercului tangent cercurilor* A, B *și dreptei* RS. *Să se demonstreze că avem relațiunile:*

$$\varrho_b\,\varrho_c'\,\varrho_a'' = \varrho_c\,\varrho_a'\,\varrho_b''$$

și

$$\frac{\varrho\,\varrho_a}{r_a} = \frac{\varrho'\,\varrho_b'}{r_b} = \frac{\varrho''\,\varrho_c''}{r_c}$$

în care r_i *sunt razele cercurilor exînscrise triunghiului* ABC; ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c *sunt razele cercurilor tritangente triunghiului* BCO_a; ϱ', ϱ_a', ϱ_b', ϱ_c' *sunt razele cercurilor tritangente triunghiului* CAO_b; *iar* ϱ'', ϱ_a'', ϱ_b'', ϱ_c'' *sunt razele cercurilor tritangente triunghiului* ABO_c.

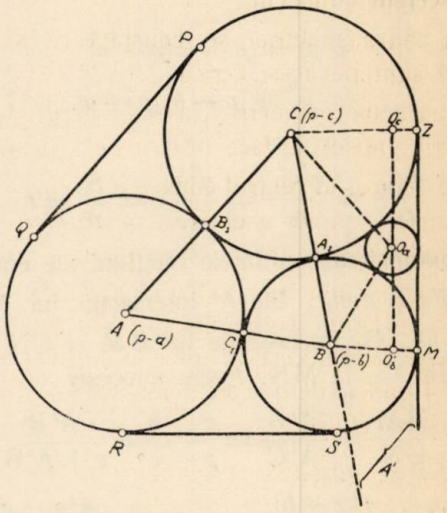
G-L GH. BUICLIU

Prima soluție. Fie A_1, B_1, C_1 punctele unde cele trei cercuri întâlnesc spre interior laturile triunghiului ABC. Aceste puncte sunt evident și punctele de tangență ale celor trei cercuri. Pe figură se vede că

$$AB_1 + CA_1 + BA_1 = p$$

$$AB_1 = p - (CA_1 + BA_1) = p - a.$$

Deci razele cercurilor A, B, C construite ca în enunț sunt $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$ așa cum sunt scrise pe figură în dreptul vârfurilor A, B, C.



Fie a, b_1, c_1, p_1 laturile și semiperimetrul triunghiului BO_aC; b, c_2, a_2, p_2 elementele analoage ale triunghiului CO_bA și c, a_3, b_3, p_3 ale triunghiului AO_cB.

Se știe că într-un triunghiu oarecare avem

$$r_a = (p-b)\operatorname{cotg}\frac{C}{2} = (p-c)\operatorname{cotg}\frac{B}{2},$$

așa că în triunghiul BO_aC putem scrie:

$$\frac{\varrho_b}{\varrho_c} = \frac{p_1 - c_1}{p_1 - b_1} = \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{p-c}{p-b}.$$

La fel găsim pentru triunghiurile CO_bA, AO_cB:

$$\frac{\varrho_c'}{\varrho_a'} = \frac{p_2 - a_2}{p_2 - c_2} = \frac{AB_1}{CB_1} = \frac{p-a}{p-c}$$

$$\frac{\varrho_a''}{\varrho_b''} = \frac{p_3 - b_3}{p_3 - a_3} = \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{p-b}{p-a}$$

$$\varrho_b\,\varrho_c'\,\varrho_a'' = \varrho_c\,\varrho_a'\,\varrho_b'',$$

care este tocmai prima relație de demonstrat.

Intr-un triunghiu ABC de suprafață S se știe că avem

$$S = pr = (p-a)r_a.$$

Aplicând această relațiune triunghiurilor BO_aC, CO_bA, AO_cB de suprafețe S_1, S_2, S_3, obținem:

$$\varrho\,\varrho_a = \frac{S_1^2}{p_1(p_1-a)} = (p_1-b_1)(p_1-c_1) =$$

$$BA_1 \cdot CA_1 = (p-b)(p-c).$$

La fel găsim

$$\varrho'\,\varrho_b' = (p-c)(p-a)$$

$$\varrho''\,\varrho_c'' = (p-b)(p-a).$$

Deci

$$\frac{\varrho\,\varrho_a}{r_a} = \frac{\varrho'\,\varrho_b'}{r_b} = \frac{\varrho''\,\varrho_c''}{r_c} = \frac{S}{p} = r,$$

care demonstrează ultimele relațiuni ale enunțului.

Soluția a doua. Fie A' intersecția lui MN cu BC și O_b', O_c' intersecțiile lui BM și CN cu paralela din O_a la MN. Avem succesiv

$$\frac{BM}{CN} = \frac{A'B}{A'C} = \frac{p-b}{p-c} = \frac{A'B}{a+A'B}$$

$$A'B = \frac{a(p-b)}{b-c} \quad \text{și} \quad A'C = \frac{a(p-c)}{b-c}.$$

Apoi

$$MN = A'N - A'M$$

$$A'M = \sqrt{\overline{A'B}^2 - \overline{BM}^2}, \quad A'N = \sqrt{\overline{A'C}^2 - \overline{CN}^2},$$

așa că

$$MN = \frac{\sqrt{a^2-(b-c)^2}}{b-c}[(p-c)-(p-a)] =$$

$$2\sqrt{(p-b)(p-c)}.$$

Fie ϱ_1 raza cercului O_a tangent cercurilor B și C. Avem

$$BO_a = BM + \varrho_1 = (p-b) + \varrho_1$$

$$BO_b' = BM - \varrho_1 = (p-b) - \varrho_1$$

deci

$$\overline{O_aO_b'}^2 = [(p-b)+\varrho_1]^2 - [(p-b)-\varrho_1]^2 = 4(p-b)\varrho_1$$

$$^{*}_{*}{}^{*} \quad O_aO_b' = 2\sqrt{(p-b)\varrho_1} \quad \text{și} \quad \overline{O_aO_c'} = 2\sqrt{(p-c)\varrho_1}$$

$$^{*}_{*}{}^{*} \quad O_b'O_c' = MN = 2\sqrt{\varrho_1}[\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}] =$$

$$2\sqrt{(p-b)(p-c)}$$

$$^{*}_{*}{}^{*} \quad \varrho_1 = \frac{(p-b)(p-c)}{[\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}]^2} = \frac{(p-b)(p-c)}{a+2\sqrt{(p-b)(p-c)}}.$$

In triunghiul BO_aC de perimetru p_1 cercurile O_a, B, C sunt ca și cercurile A, B, C față de triunghiul ABC. Deci vom avea

$$p_1 - b_1 = p - b; \quad p_1 - c_1 = p - c; \quad p_1 - a = \varrho_1$$

$$^{*}_{*}{}^{*} \quad p_1 = a + \varrho_1 = \frac{[a+\sqrt{(p-b)(p-c)}]^2}{a+2\sqrt{(p-b)(p-c)}}.$$

Calculând raza ϱ a cercului înscris în BO_aC, după formula generală

$$r = \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}{\sqrt{p}}$$

pentru un triunghiu oarecare, vom avea

$$\varrho = \frac{\sqrt{p_1-a)(p_1-b_1)(p_1-c_1}}{\sqrt{p_1}},$$

sau înlocuind literile cu indicii prin valorile lor și făcând toate calculele, găsim

$$\varrho = \frac{(p-b)(p-c)}{\sqrt{a+\sqrt{(p-b)(p-c)}}}.$$

Apoi la fel, pe aceiași cale, se stabilesc formulele

$$\varrho_a = \sqrt{a+\sqrt{(p-b)(p-c)}},$$

$$\varrho_b = \frac{p-c}{a+2\sqrt{(p-b)(p-c)}}\sqrt{a+\sqrt{(p-b)(p-c)}},$$

$$\varrho_c = \frac{p-b}{a+2\sqrt{(p-b)(p-c)}}\sqrt{a+\sqrt{(p-b)(p-c)}}.$$

Prin simple rotații circulare între litere se pot deduce și valorile lui ϱ', ϱ_a', ϱ_b', ϱ_c'; ϱ'', ϱ_a'', ϱ_b'', ϱ_c'' care se pot de altfel calcula pe aceiași cale pe care au fost calculate ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c. Din aceste valori se deduc formulele de demonstrat.

Aceste două soluții a fost date la 5 Decembrie 1931 de d-l *N. N. Mihăileanu*, pe atunci elev la liceul din Constanța, singurul rezolvitor al problemei.

La soluția a doua se pot aduce unele simplificări. Am dat-o însă așa cum ne-a fost trimisă de d-l *N. N. Mihăileanu* pentru a dovedi corespondenților că pot să încerce fără șovăire să rezolvă problemele vechi întrebuințând uneori mijloace foarte elementare.

Gh. B.

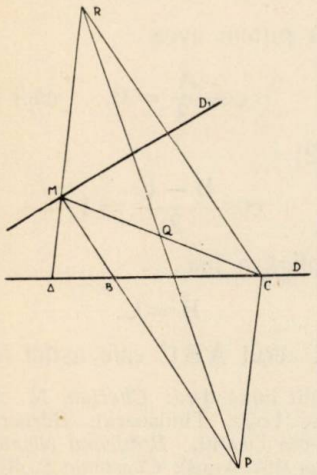
Problema 1596. — *Fie două drepte* D *și* D_1 *în același plan, trei puncte fixe* A, B, C *pe dreapta* D *și un punct mobil* M *pe dreapta* D_1. *Paralelele duse prin* C *la* AM *și* BM *intersectează respectiv*

pe B M *şi* A M *în punctele* P şi R, *care descriu drepte paralele cu* D_1.

Intersecţia Q *a dreptelor* C M *şi* P R *descrie de asemenea, o dreaptă paralelă cu* D_1.

LT. C. IONESCU-ŢIU

Se observă mai întâi că Q — intersecţia diagonalelor paralelogramuiui M P C R — este mijlocul distanţei M C; C fiind fix şi M mobil pe D_1, Q va descrie o paralelă la D_1.



Din cauza dreptelor paralele, putem scrie

$$\frac{BM}{BP}=\frac{AB}{BC}=\text{const};\qquad \frac{AM}{AR}=\frac{AB}{BC}=\text{const};$$

deci P şi R descriu drepte paralele cu D_1.

Soluţii geometrice date de d-nii: *Apostol Radu* (lic. mil., M-rea Dealu), *Dăscălescu H. Şt.* (Focşani), *Rădulescu Octavian* (lic. mil., M-rea Dealu) şi *Turcu R. Sandu* (lic. mil., Iaşi).

Soluţii analitice date de d-nii: *Aman V. Const.* şi *Mureşan I. Oct.* (lic. Arad).

Soluţie trigonometrică dată de d-l *S-lt. Ştefănescu F. Marin* (Alba-Iulia).

Problema 1655. — *Intr'un triunghiu* A B C, *fie* α, β, γ *bisectoarele interioare şi* α', β', γ' *bisectoarele exterioare: să se stabilească relaţiile*

$$\Sigma c\cos\frac{1}{2}(A-B)=2s\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$\Sigma c^2\sin(A-B)=8s^2\left(\frac{1}{\alpha\,\alpha'}+\frac{1}{\beta\,\beta'}+\frac{1}{\gamma\,\gamma'}\right).$$

SUB-LT MIRCEA GRUMAZESCU

Se ştie şi se poate uşor verifica pe o figură că bisectoarea α şi înălţimea h din vârful A, fac unghiul $\frac{1}{2}(B-C)$ — dacă $B>C$ — iar α' find perpendiculară pe α, face cu h complimentul acestui unghiu; rezultă că

$$h=\alpha\cos\frac{1}{2}(B-C)=\alpha'\sin\frac{1}{2}(B-C)$$

şi fiindcă

$$h=\frac{2s}{a}$$

se obţine

$$\frac{2s}{\alpha}=a\cos\frac{1}{2}(B-C),\ \frac{2s}{\alpha'}=a\sin\frac{1}{2}(B-C).$$

Prima relaţie este imediată; pentru a doua avem

$$\frac{8s^2}{\alpha\,\alpha'}=2a^2\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(B-C)=a^2\sin(B-C).$$

Se observă că sumarea relaţiilor analoage este inutilă.

Alte soluţii date de d-nii: *D. Buznea, St. Cetăţeanu, E. Modâlcă, M. Negrea, I. Stamate, M, Stoenescu, T. Ştefan.*

N. M

Problema 1677. — *O dreaptă variabilă dusă prin punctul O, taie două drepte* D_1, D_2 *în* M_1, M_2; *paralelele din* M_1, M_2 *la* D_2, D_1 *se intersectează în* N. *Să se arate că locul geometric al lui* N *este o iperbolă de centru* O *cu asimptotele de direcţie* D_1, D_2.

N. N. MIHAILEANU

Soluţie aualitică dată de d-l *Stamate I. I.* (student, Cluj). Alegem axele de coordonate paralele cu D_1, D_2. Aceste drepte vor avea ecuaţiile

$$(D_1)\quad x-a=0;\qquad (D_2)\quad y-b=0,$$

iar dreapta variabilă ce trece prin originea O

$$y=\lambda x$$

intersectează pe D_1, D_2 în punctele

$$M_1(a,\ \lambda a);\qquad M_2(b/\lambda,\ b)$$

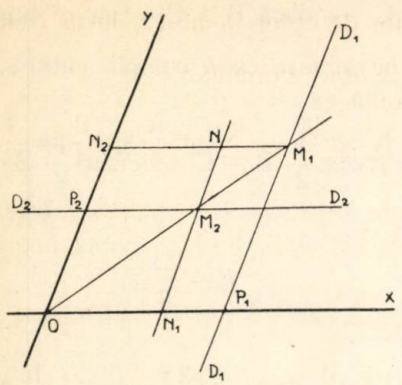
paralelele ce trec prin M_1, M_2 sunt

$$x=\lambda a,\qquad y=\frac{b}{\lambda}$$

eliminând pe λ, se află

$$xy = ab$$

ecuaţia iperbolei de centru O, asimptote Ox, Oy.



Se observă că curba mai trece prin intersecţia (a, b) a dreptelor D_1, D_2.

Observare. 1. Alte *soluţii analitice* date de d-nii: *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani) şi *Sub-Lt. Ştefănescu F. Marin.*

2. *Soluţie geometrică:* fie încă P_1, P_2 intersecţiile cu Ox, Oy ale dreptelor D_1, D_2 şi N_1, N_2 intersecţiile cu axele ale dreptelor NM_2, NM_1; avem

$$\frac{ON_1}{OP_1} = \frac{N_1M_2}{M_1P_1} = \frac{OP_2}{NN_1}$$

$$ON_1 \cdot NN_1 = xy = OP_1 \cdot OP_2 = ab.$$

3. *Generalizare.* Fie U_1, U_2 două puncte pe D_1, D_2. Razele U_1M_2, U_2M_1 sunt în corespondenţă omografică, deci intersecţia lor descrie o conică trecând prin (D_1, D_2), U_1, U_2. Pentru a afla tangenta în U_1 se caută omoloaga razei U_1U_2 în omografia considerată; se află OU_1; deasemenea tangenta în U_2 este OU_2.

Ducând acum pe U_1, U_2 la infinit pe dreptele respective, conica are două tangente reale la infinit, deci două asimptote trecând prin O paralele cu D_1 şi D_2. Dacă D_1 e perpendiculară pe D_2, iperbola este echilateră.

N. M.

Problema 1751. — *Să se arate că triunghiul care verifică relaţia*

$$b + c = 4R\cos\frac{A}{2},$$

este isoscel, notaţiile fiind cele obicinuite.

MARTIAN V. MURGU

Soluţie. Dacă în relaţia dată înlocuim b şi c prin valorile lor scoase din formulele cunoscute

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

obţinem

$$2R(\sin B + \sin C) = 4R\cos\frac{A}{2}$$

sau simplificând cu $2R$ şi transformând suma din primul membru în produs, avem:

$$(1) \qquad 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\cos\frac{A}{2},$$

Cum,

$$\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2},$$

relaţia (1) devine

$$(2) \qquad \cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - 1\right) = 0.$$

Fiindcă nu putem avea

$$\cos\frac{A}{2} = 0, \qquad \text{căci } A < 180^\circ,$$

rezultă din (2)

$$\cos\frac{B-C}{2} = 1,$$

ceeace ne obligă a lua

$$B = C.$$

Triunghiul cerut ABC este astfel isoscel.

Au dat soluţii bune d-ra: *Checian N. Ana* şi d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timişoara), *Bârlea V. Suhăţeanu* (lic Milit., M-rea Dealu), *Brădeanu Nicolae* (lic. Beiuş), *Borneas Marius* (lic. Arad), *Cherţman S. Mozes* (lic. Giurgiu), *Chintescu M. Matei* (lic. Milit. N. Filipescu), *Christea N. Nicolae* (lic. Blaj), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Focşani), *Dragomir Adrian Ermin* (lic. Milit., N Filipescu), *Gligor N.* (lic. Arad), *Goga Florescu*, *Herman I. Carol* (Blaj), *Jidanu I. C.* (Şc. Polit, Timişoara) *Logofătu M. Ioan* (lic. Beiuş), *Luca I. Ioan* (lic. Arad), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt, Roman), *Mihăileanu Andrei-Călin* (lic. Arad), *Mironescu I D-tru* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Mocanu I. C-tin* (lic. Cernăuţi), *Modâlcă I. Emil* (bacalaureat, T-Severin), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Schapira Salo* (lic. Piatra-Neamţ), *Segal Zigu* (lic. Vaslui). *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Spătaru Alexandru* (lic. Cluj), *Stamate I. Ionel* (student, Cluj), *Tătaru Alexandru* (lic. Orăştie), *Tica P. Marin-Gall, Tilica C. Ştefan* (Şc. Milit. de Geniu), *Văduva F. Marin* (lic Giurgiu), *Venter D-tru* (lic. Beiuş) şi *Vijelie Gh. Eugen* (lic. Milit., N. Filipescu).

Problema 1775 — *Dacă* A, B, C *sunt unghiurile unui triunghiu, să se arate că avem:*

$$sp\frac{A}{4}\,cp\frac{B}{4} + sp\frac{B}{4}\,cp\frac{C}{4} + sp\frac{C}{4}\,cp\frac{A}{4} = \frac{1}{2}.$$

V. ALACI

Soluţie dată de d-l profesor *Vişa Eugen.*

In relaţia,

$$sp\frac{A}{4}\,sp\frac{B}{4}\,sp\frac{C}{4} + cp\frac{A}{4}\,cp\frac{B}{4}\,cp\frac{C}{4} = \frac{1}{2},$$

stabilită de autor în „R. M. T.“, vol. XIX, p. 11, folosind formula cunoscută

(1) $cp\, x = 1 - sp\, x$, valabilă pentru $0 \leqq x \leqq 90^0$,

obținem,

$$sp\frac{A}{4} sp\frac{B}{4} sp\frac{C}{4} + \left(1 - sp\frac{A}{4}\right)\left(1 - sp\frac{B}{4}\right)\left(1 - sp\frac{C}{4}\right) = \frac{1}{2},$$

(fiindcă $0 \leqq \frac{A}{4}, \frac{B}{4}, \frac{C}{4} \leqq 90^0$),

sau:

$$sp\frac{A}{4} sp\frac{B}{4} sp\frac{C}{4} + \left(1 - sp\frac{A}{4} - sp\frac{B}{4} - sp\frac{C}{4} + sp\frac{A}{4} sp\frac{B}{4} + sp\frac{B}{4} sp\frac{C}{4} + sp\frac{C}{4} sp\frac{A}{4} - sp\frac{A}{4} sp\frac{B}{4} sp\frac{C}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Această relație se mai poate scri sub forma

$$sp\frac{A}{4}\left(1 - sp\frac{B}{4}\right) + sp\frac{B}{4}\left(1 - sp\frac{C}{4}\right) + sp\frac{C}{4}\left(1 - sp\frac{A}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

și în baza formulei (1), în senz invers, găsim

$$sp\frac{A}{4} cp\frac{B}{4} + sp\frac{B}{4} cp\frac{C}{4} + sp\frac{C}{4} cp\frac{A}{4} = \frac{1}{2}.$$

care este tocmai relația cerută.

Observări. 1°. Dacă $A = B = C = 60^0$, relația din enunț devine

$$3\, sp\, 15^0\, cp\, 15^0 = \frac{1}{2},$$

care este echivalentă relației particulare,

$$sp^3 15^0 + cp^3 15^0 = \frac{1}{2},$$

stabilită de autor în locul citat la p. 12.

2°. In mod analog, pentru $A = \frac{\pi}{2}$, $B = C = \frac{\pi}{4}$, se găsește că relația dată devine,

$$sp\frac{\pi}{8} cp\frac{\pi}{16} + sp\frac{\pi}{16} cp\frac{\pi}{16} + sp\frac{\pi}{16} cp\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2},$$

care este echivalentă relației

$$sp\frac{\pi}{8} sp^2\frac{\pi}{16} + cp\frac{\pi}{8} cp^2\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2},$$

stabilită tot de autor la p. 12, locul citat.

A 2-a soluție. Formula

$$\sum sp\frac{A}{4} - \sum sp\frac{A}{4} sp\frac{B}{4} = \frac{1}{2}$$

stabilită de autor în lucrarea sa *„Trigonometria patratică“*, vol. XIX, p. 11, se mai poate scri

(2) $$\sum sp\frac{A}{4}\left(1 - sp\frac{B}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Cum $0 \leqq \frac{A}{4}, \frac{B}{4}, \frac{C}{4} \leqq 90^0$, în baza formulei fundamentale din *„Trigonometria patratică“*, $1 - sp\,\alpha = cp\,\alpha$, dacă $0 \leqq \alpha \leqq 90_0$, relația (2) devine,

$$sp\frac{A}{4} cp\frac{B}{4} + sp\frac{B}{4} cp\frac{C}{4} + sp\frac{C}{4} cp\frac{A}{4} = \frac{1}{2},$$

adică tocmai relația cerută.

Soluții analoage date de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timișoara) și *Popovici Mircea* (student, Șc. Polit., Timișoara).

Soluția 3-a. Ținând seamă de formulele din tabloul (11),

$$sp\,\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}, \qquad cp\,\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha},$$

din *„Trigonometria patratică“*, valabile pentru $0 \leqq \alpha \leqq 90^0$ și notând cu E primul membru al relației cerute, putem scri succesiv:

(3) $$E = \frac{\operatorname{tg}\frac{A}{4}}{\left(1 + \operatorname{tg}\frac{A}{4}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{B}{4}\right)} + \frac{\operatorname{tg}\frac{B}{4}}{\left(1 + \operatorname{tg}\frac{B}{4}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{C}{4}\right)} + \frac{\operatorname{tg}\frac{C}{4}}{\left(1 + \operatorname{tg}\frac{C}{4}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{A}{4}\right)} = \frac{\sum \operatorname{tg}\frac{A}{4} + \sum \operatorname{tg}\frac{A}{4} \operatorname{tg}\frac{B}{4}}{\left(1 + \operatorname{tg}\frac{A}{4}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{B}{4}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{C}{4}\right)}.$$

Dar în „F. G. M“, p. 586 sunt stabilite relațiile

(4) $$\sum \operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}=1,$$

$$\sum \operatorname{tg}\frac{A}{4}=\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4},$$

iar în „*Geometria Triunghiului*", de *Traian Lalescu*, în partea IV, Cap. 13, No. 35, este stabilită relaţia:

(5) $$\left(1+\operatorname{tg}\frac{A}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{B}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{C}{4}\right)=$$

$$2\left(1+\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}\right).$$

In virtutea identităţilor (4) şi (5), relaţia (3) devine

$$E=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}}{2\left(1+\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}\right)}=\frac{1}{2};$$

şi astfel relaţia cerută este stabilită.

Soluţii analoage date de d-nii: *Cazanacli V. Petre* (Ismail), *Cherţman S. Mozes* (lic Giurgiu), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Văduva F. Marin* (lic. Giurgiu) şi *Vijelie Gh. Eugen* (lic. Milit, N. Filipescu).

PROBLEME PROPUSE

1874. — Să se găsească numărul de trei cifre $\overline{abc}$ ştiind că produsul $6\times\overline{abc}$ este tot un număr de trei cifre, scris cu cifrele a, b, c.

G-L GH. BUICLIU

1875. — Se cer patratele de şase cifre astfel ca numărul format de ultimele trei cifre să reprezinte rădăcina sa patratică.

C. BAKONYI

1876. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{y}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{x+2}}=2\\ \sqrt{y-\sqrt{x+1}}-\sqrt{x-\sqrt{y+3}}=0.\end{cases}$$

MARIN F. VADUVA

1877. — Se consideră pe latura BC a triunghiului ABC segmentele $\overline{CE}=\overline{AE}$ şi $\overline{BD}=\overline{AD}$ şi fie A_1 mijlocul laturei BC. Să se arate că centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi mijloacele segmentelor DE şi AA_1 sunt trei puncte coliniare.

MARIA NEUMANN

1878. — Pe un cerc O se consideră un punct fix A şi un punct variabil M; perpendiculara ridicată în punctul A pe dreapta MA taie tangenta cercului dusă în punctul M, într'un alt punct P.

Se cere locul geometric al punctului P când M descrie cercul O. Să se construiască curba corespunzătoare.

VASILE VASU

1879. — Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relaţia:

$$\frac{r_a-r_b}{a-b}+\frac{r_b-r_c}{b-c}+\frac{r_c-r_a}{c-a}=$$

$$\frac{(r_a-r_b)^3+(r_b-r_c)^3+(r_c-r_a)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}.$$

M. C. POSTELNICESCU

1880. — Dacă într'un triunghiu oarecare ABC, unim punctele unde cercurile exînscrise ating laturile, se formează triunghiul $A'B'C'$.

Dacă a, b, c sunt laturile şi h_a, h_b, h_c înălţimile triunghiului ABC, iar a', b', c' laturile triunghiului $A'B'C'$, să se arate că avem:

$$a'=\sqrt{a^2-h_b h_c},\qquad b'=\sqrt{b^2-h_c h_a},$$

$$c'=\sqrt{c^2-h_a h_b}.$$

SUB LT ADRIAN POPESCU

1881. — Se cere graficul reprezentat prin sistemul parametric:

$$\begin{cases}x=\dfrac{sp\,\alpha-cp\,\alpha}{5\,sp\,\alpha+cp\,\alpha-2}\\ y=\dfrac{sp\,\alpha+cp\,\alpha}{5\,sp\,\alpha+cp\,\alpha-2}.\end{cases}$$

Să se exprime şi să se construiască unghiul α în funcţie de unghiul polar θ al punctului (x, y).

V. ALACI

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait a Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 286 articles, 249 notes et 1892 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIII, s'a primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Prof. Ion Rizescu.* Str. Mihăileanu 18, Constanţa.
2. *Prof. Constantin Borş.* Str. Petru Rareş 85, Piatra Neamţ.
3. D-l *Marin I. Popa,* Licenţiat în Matematici. Bulevardul Alexandru I. Cuza 20, Bucureşti II.
4. *Dr. Michail St. Botez,* profesor, Str. I. G. Duca 15, Piatra Neamţ.

Legându-se colecţia R. M. T., anul XIX, în volum şi rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

A apărut volumul:

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ

de

VALERIU ALACI

Profesor, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Lucrare premiată de „ACADEMIA ROMÂNĂ"

272 pagini — Preţul: 180 Lei.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XIX, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

ANUL XX OCTOMVRIE 1940 No. 8.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **MIHAIL BOTEZ**: TEOREME IN LEGĂTURĂ CU CURBELE REZULTANTE.
2. **S-LT. M. GRUMAZESCU**: ASUPRA UNUI TRIUNGHIU.
3. NOTE MATEMATICE: 17, 18.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 361, 1757, 1760, 1761, 1765, 1774, 1778.
6. PROBLEME PROPUSE: 1882-1889.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XX, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIX inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XX — No. 8 TIMISOARA, OCTOMVRIE 1940

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

TEOREME ÎN LEGĂTURĂ CU CURBELE REZULTANTE

DE

MIHAIL BOTEZ
PROFESOR.

În cele ce urmează, voi arăta câteva teoreme în legătură cu ceiace se numește *„curbă rezultantă“* a două curbe date.

Rezultatele obținute aici sunt susceptibile de o generalizare și de o extindere a lor în cazul curbelor strâmbe.

„Se numește rezultantă a două curbe date C_1 *și* C_2, *cu razele de curbură paralele, o curbă* Γ *a cărei rază de curbură este egală cu suma celorlalte două“.*

Curbele C_1 *și* C_2 *sunt composantele curbei* Γ.[1]

Dacă notăm cu s_1 și s_2 arcele lui C_1 și C_2, și cu σ arcul corespunzător a lui Γ, vom avea după definiție:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d\sigma}{de} = \frac{ds_1}{de} + \frac{ds_2}{de}$$

în care:

$$\frac{ds_1}{de} = R_1 \quad \text{și} \quad \frac{ds_2}{de} = R_2 .$$

Pentru ușurința demonstrațiilor voiu întrebuința ecuațiile intrinsece ale curbelor.[2]

Să considerăm:

I. Curbele C_1 și C_2, au razele de curbură, egale și de semn contrariu, adică:

$$\frac{ds_1}{de} = -\frac{ds_2}{de} .$$

Atunci ținând seama de (A), putem scrie:

$$\frac{d\sigma}{de} = \frac{ds_1}{de} - \frac{ds_1}{de} = 0,$$

sau încă:

$$\frac{d\sigma}{de} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = 0$$

(unde $y = f(x)$ represintă curba Γ).

Ceiace dă:

$$1 + y'^2 = 0,$$

sau:

$$y' = \pm i$$

și integrând:

$$y = \pm i x + k.$$

De unde rezultă:

Rezultanta a două curbe ce au razele de curbură egale și de semn contrar este o dreaptă izotropă.

II. Să considerăm, composantele C_1 și C_2 ca fiind curbe asemenea; în acest caz, razele de curbură sunt proporționale; adică între R_1 și R_2 există relația:

$$\frac{ds_1}{de} = k\frac{ds_2}{de}$$

și înlocuind în (A):

$$\frac{d\sigma}{de} = \frac{ds_2}{de} + k\frac{ds_2}{de} = (1+k)\frac{ds_2}{de},$$

sau încă:

$$\frac{d\sigma}{de} = (1+\frac{1}{k})\frac{ds_1}{de} .$$

De aici urmează că:

Rezultanta a două curbe asemenea, este o curbă asemenea cu curbele date.

[1]) Analysc des courbes planes — *Abbé Aoust.* Cap. II.
[2]) Geom. Anal. Fasc. IV. *Tr. Lalescu.*

III. Fie acum curbele C_1 şi C_2 paralele. În acest caz, între razele lor de curbură există relaţia:

$$\frac{ds_1}{de} = \frac{ds_2}{de} + n,$$

procedând ca mai înainte obţinem:

$$\frac{d\sigma}{de} = \frac{ds_1}{de} + \frac{ds_1}{de} = 2\frac{ds_1}{de} + n,$$

sau încă:

$$\frac{d\sigma}{de} = 2\frac{ds_1}{de} - n.$$

Deci:

Rezultanta a două curbe paralele, este o curbă paralelă cu curba a cărui raport de similitudine cu curbele date este 2.

IV. Să considerăm curbele C_1 şi C_2, cari au ca desfăşurate curbele Γ_1 şi Γ_2, a căror rezultantă ne propunem să o găsim.

Ecuaţiile intriusece a curbelor propuse sunt:

$$(C_1) \quad \frac{ds_1}{de} = \varphi_1(e) \quad \text{şi} \quad (C_2) \quad \frac{ds_2}{de} = \varphi_2(e)$$

şi ecuaţiile desfăşuratelor vor fi:

$$(\Gamma_1) \quad \frac{d^2 s_1}{de^2} = \frac{dR_1}{de} \quad \text{şi} \quad (\Gamma_2) \quad \frac{d^2 s_2}{de^2} = \frac{dR_2}{de}.$$

Ţinând seama de definiţia rezultantei şi notând cu τ arcul corespunzător, vom avea:

$$\frac{d\tau}{de} = \frac{d^2 s_1}{de^2} + \frac{d^2 s_2}{de^2} = \frac{dR_1}{de} + \frac{dR_2}{de} = \frac{d}{de}(R_1 + R_2).$$

Se ştie însă că:

$$R_1 + R_2 = \frac{ds_1}{de} + \frac{ds_2}{de} = \frac{d\sigma}{de},$$

deci:

$$\frac{d\tau}{de} = \frac{d}{de} \cdot \left(\frac{d\sigma}{de}\right),$$

cu alte cuvinte:

Rezultanta a două desfăşurate, este desfăşurata rezultantei curbelor.

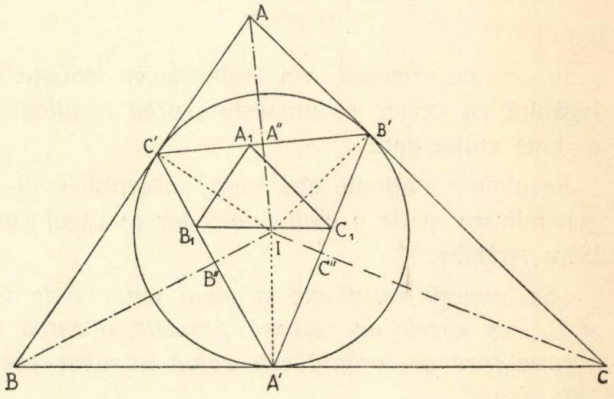
ASUPRA UNUI TRIUNGHIU

(Articol de trigonometrie)

De

S-lt M. GRUMĂZESCU

Fie A B C un triunghiu oarecare şi A′ B′ C′ un triunghiu provenit din unirea punctelor de tangenţă ale cercului înscris în triunghiul A B C, cu laturile acestui triunghiu. Însemnăm cu A, B, C, a, b, c respectiv unghiurile şi laturile triunghiului A B C şi cu A′, B′, C′, a', b', c' unghiurile şi laturile triunghiului A′ B′ C′.



In cele ce urmează voiu exprima întâiu elementele triunghiului A′ B′ C′ în funcţie de elementele triunghiului de referinţă şi apoi în baza relaţiunilor de legătură ce există în orice relaţie trigonometrică $F(a'..A'..) = 0$ între elementele triunghiului A′ B′ C′, voi căuta să stabilesc relaţiuni analoage $F(a,...A..) = 0$ între elementele triunghiului de referinţă.

I. Din figură se deduce:

$$(1) \quad A' = 90^0 - \frac{A}{2}, \quad B' = 90^0 - \frac{B}{2}, \quad C' = 90^0 - \frac{C}{2}.$$

Din triunghiurile dreptunghice B′ A″ I, C′ B″ I, A′ C″ I, obţinem respectiv:

$$(2) \quad a' = 2r\cos\frac{A}{2}, \quad b' = 2r\cos\frac{B}{2}, \quad c' = 2r\cos\frac{C}{2}.$$

De unde rezultă:

$$(3) \quad 2p' = a' + b' + c' = 2r\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right)$$

$$= 8r \cos\frac{\pi - A}{4} \cos\frac{\pi - B}{4} \cos\frac{\pi - C}{4}.$$

Din relaţiile ce ne dau laturile acestui triunghiu, se deduce că triunghiul $A'B'C'$ este omotetic cu triunghiul metaarmonic al lui I în raportul $\frac{r}{R}$ şi cu triunghiul antiortic, provenit din unirea centrelor cercurilor circumscrise triunghiului ABC, în raportul $\frac{r}{R}$.

Se observă din figură că triunghiul $A'B'C'$ este înscris în cercul de rază r. Prin urmare:

(4) $$R' = r.$$

Suprafaţa triunghiului $A'B'C'$ o deducem din relaţia:

(5) $$2S' = a'b' \sin C' \quad {}^{*}_{*}{}^{*} \quad S' = S\frac{r}{2R}.$$

Formula ce ne dă în acelaş timp şi raportul dintre suprafeţele celor două triunghiuri, este:

(5') $$\frac{S'}{S} = \frac{R'}{2R}.$$

Fie h'_a, h'_b, h'_c, înălţimile triunghiului $A'B'C'$. Ţinând seamă de relaţiile stabilite mai sus, obţinem:

(6) $$h'_a = 2h_a \sin\frac{A}{2}, \qquad h'_b = 2h_b \sin\frac{B}{2},$$

$$h'_c = 2h_c \sin\frac{C}{2},$$

H' fiind ortocentrul triunghiului $A'B'C'$ şi I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, avem:

(7) $$IH' = r\sqrt{\frac{R - 2r}{R}}.$$

Fie m'_a, m'_b, m'_c medianele în triunghiul $A'B'C'$. Ţinând seamă de relaţiile:

$$m'_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b'^2 + c'^2) - a'^2}$$

şi analoagele, deducem:

(8) $$m'_a = \frac{r}{4R}\sqrt{2\left(b^2 \operatorname{cosec}^2\frac{B}{2} + c^2 \operatorname{cosec}^2\frac{C}{2}\right) - a^2 \operatorname{cosec}^2\frac{A}{2}} \cdots$$

Insemnând cu α' bisectoarea interioară şi pornind dela relaţia:

$$\alpha' = \frac{2b'c'}{b' + c'} \cos A' \ldots$$

obţinem:

(9) $$\alpha' = \frac{r}{R} \cdot \frac{bc \cos\frac{\pi - A}{4}}{b \sin\frac{C}{2} + c \sin\frac{B}{2}} \ldots,$$

iar bisectoarea exterioară:

(10) $$\alpha'_1 = \frac{r}{R} \cdot \frac{bc \sin\frac{\pi - A}{4}}{b \sin\frac{C}{2} - c \sin\frac{B}{2}} \ldots.$$

Procedând la fel, obţinem relaţiile ce ne dau: raza cercului înscris în triunghiul $A'B'C'$ şi razele cercurilor exînscrise aceluiaş triunghiu:

(11) $$r' = 4r \sin\frac{\pi - A}{4} \sin\frac{\pi - B}{4} \sin\frac{\pi - C}{4},$$

(12) $$r'_a = 4R \sin\frac{\pi - A}{4} \cos\frac{\pi - B}{4} \cos\frac{\pi - C}{4} \cdots$$

Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul ortic al triunghiului $A'B'C'$, iar $a_1\,b_1\,c_1$ laturile acestui triunghiu. Avem:

$A_1 = 180^0 - 2A'$, $B_1 = 180^0 - 2B'$, $C' = 180^0 - 2C'$,

sau:

$$A_1 = 180^0 - 2(90^0 - \frac{A}{2}) = A, \quad B_1 = B, \quad C_1 = C.$$

Prin urmare unghiurile triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt egale.

$$a_1 = a' \cos A', \quad b_1 = b' \cos B', \quad c_1 = c' \cos C',$$

(13) $$a_1 = \frac{r}{2R}a, \qquad b_1 = \frac{r}{2R}b, \qquad c_1 = \frac{r}{2R}c.$$

Deci rezultă că triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi ABC sunt asemenea, raportul de proporţionalitate între laturi fiind:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{R'}{2R}.$$

Dacă ω' este unghiul lui *Brocard* în triunghiul $A'B'C'$ şi ţinem seamă de relaţia cunoscută:

$$\operatorname{cotg}\omega' = \operatorname{cotg}A' + \operatorname{cotg}B' + \operatorname{cotg}C',$$

obţinem:

(14) $$\operatorname{cotg}\omega' = \operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

La fel am putea obține, în funcție de elementele triunghiului A B C, distanțele între diferitele puncte remarcabile ale triunghiurilor A′ B′ C′.

Mă opresc deocamdată aici pentru a trece la partea 2-a a tratării ce mi-am propus a o desvolta, anume ca în funcție de elementele triunghiului A′ B′ C′ ce le-am calculat mai sus, să obțin diferite relații trigonometrice.

II. Să considerăm relația următoare:

(1) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$

Pentru triunghiul A′ B′ C′ ea devine:

$\sin 2A' + \sin 2B' + \sin 2C' = 4 \sin A' \sin B' \sin C',$

sau ținând seamă de relațiile dintre unghiurile ambelor triunghiuri, relații stabilite în partea I-a, avem:

$$\sin(\pi - A) + \sin(\pi - B) + \sin(\pi - C) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right),$$

sau în fine:

(1′) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$

La fel procedând cu relațiile cunoscute:

(2) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C,$

(3) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2},$

(4) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$

(5) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$

(6) $$\frac{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} + \frac{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} + \frac{\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A}{\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A} = 1.$$

se transformă în următoarele relații:

(2′) $$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2 + 2 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2},$$

(3′) $$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} = 4 \cos\frac{\pi - A}{4} \cos\frac{\pi - B}{4} \cos\frac{\pi - C}{4},$$

(4′) $$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 1 + 4 \sin\frac{\pi - A}{4} \sin\frac{\pi - B}{4} \sin\frac{\pi - C}{4}.$$

(5′) $$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2} \operatorname{cotg}\frac{B}{2} \operatorname{cotg}\frac{C}{2}.$$

(6′) $$\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2}} + \frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}} + \frac{\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2} + \operatorname{cotg}\frac{A}{2}} = 1.$$

La rândul lor relațiile (2′) și (5′) se mai pot transforma, obținând următoarele identități:

(2″) $$\cos^2\frac{\pi - A}{4} + \cos^2\frac{\pi - B}{4} + \cos^2\frac{\pi - C}{4} = 2 + 2 \sin\frac{\pi - A}{4} \sin\frac{\pi - B}{4} \sin\frac{\pi - C}{4},$$

(5″) $$\operatorname{cotg}\frac{\pi - A}{4} + \operatorname{cotg}\frac{\pi - B}{4} + \operatorname{cotg}\frac{\pi - C}{4} = \operatorname{cotg}\frac{\pi - A}{4} \operatorname{cotg}\frac{\pi - B}{4} \operatorname{cotg}\frac{\pi - C}{4}.$$

Din identitatea:

$$\frac{\cos(B - C)}{\cos A} + \frac{\cos(C - A)}{\cos B} + \frac{\cos(A - B)}{\cos C} + 2 \frac{\cos(B - C)\cos(C - A)\cos(A - B)}{\cos A \cos B \cos C},$$

stabilită în G. M., anul XLII, pag. 374, pe care o considerăm în triunghiul A′ B′ C′, prin transformare, obținem următoarea identitate:

$$\frac{\cos B + \cos C}{\cos A - 1} + \frac{\cos C + \cos A}{\cos B - 1} + \frac{\cos A + \cos B}{\cos C - 1} - 2 = \frac{(\cos B + \cos C)(\cos C + \cos A)(\cos A + \cos B)}{(\cos A - 1)(\cos B - 1)(\cos C - 1)}.$$

Dacă trecem acum la relațiuni care în afară de unghiuri să cuprindă și alte elemente ale unui

triunghiu, prin transformare, obținem o serie de relațiuni trigonometrice, dintre care o parte le voi da mai jos, pentru a indica mai mult procedeul de urmat.

Pornind dela cele mai cunoscute:

$$(7) \qquad a = b\cos C + c\cos B,$$

$$(8) \qquad a\cos(B-C) = b\cos B + c\cos C,$$

$$(9) \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

și analoagele lor, prin transformare, găsim următoarele relații:

$$(7') \quad a\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = b\sin^2\frac{C}{2} + c\sin^2\frac{B}{2},$$

$$(8') \qquad a\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = b + c.$$

$$(9') \quad a^2\operatorname{cosec}^2\frac{A}{2} = b^2\operatorname{cosec}^2\frac{B}{2} + c^2\operatorname{cosec}^2\frac{C}{2} - 2bc\sin\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B}{2}\operatorname{cosec}\frac{C}{2}.$$

Am obținut astfel relația (8') și prin alt procedeu, decât cel obișnuit.

Trecând acum la alte relații:

$$(10) \quad a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B) = 0.$$

$$(11) \quad 2S = \frac{a^2}{\operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C} = \frac{b^2}{\operatorname{cotg}C + \operatorname{cotg}A} = \frac{c^2}{\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B},$$

$$(12) \quad 4S = a^2\operatorname{cotg}A + b^2\operatorname{cotg}B + c^2\operatorname{cotg}C,$$

obținem prin transformare:

$$(10') \quad a\frac{\sin B - \sin C}{\cos A - 1} + b\frac{\sin C - \sin A}{\cos C - 1} + c\frac{\sin A - \sin B}{\cos C - 1} = 0,$$

$$(11') \quad \frac{\cos A + 1}{\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \frac{\cos B + 1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}} = \frac{\cos C + 1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}} = \frac{p}{2R},$$

$$(12') \quad abc = r\left(\frac{a^2}{\sin A} + \frac{b^2}{\sin B} + \frac{c^2}{\sin C}\right).$$

Tot în acest mod, relațiunea trigonometrică:

$$(13) \quad \frac{\cos(B-C)}{h_a} + \frac{\cos(C-A)}{h_b} + \frac{\cos(A-B)}{h_c} = \frac{2}{R},$$

publicată și rezolvată în R. M. T., an. XVII, pag. 97, pe care o considerăm în triunghiul $A'B'C'$ și ținând seamă de relațile (6) dela Partea I-a se transformă în următoarea relație:

$$(13') \quad \frac{\cos B + \cos C}{h_a(1-\cos A)} + \frac{\cos C + \cos A}{h_b(1-\cos B)} + \frac{\cos A + \cos B}{h_c(1-\cos C)} = \frac{2}{r}.$$

La fel din relația:

$$(14) \quad \frac{h_a h_b h_c}{(h_a+h_b)(h_b+h_c)(h_c+h_a)} = \frac{\sin A\sin B\sin C}{(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)},$$

publicată și rezolvată în R. M. T., an. XVI, pag. 86, obținem următoarea relație:

$$(14') \quad \frac{h_a h_b h_c}{II\left(h_a\sin\frac{A}{2} + h_b\sin\frac{B}{2}\right)} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}{\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}\right)\left(\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)}$$

Iată deci, din aceste exemplificări, un alt procedeu de a obține, din relații trigonometrice cunoscute, noiu și interesante identități.

III. *Cazuri particulare.* In toate relațiile stabilite până acum am presupus că triunghiul ABC este un triunghiu oarecare. Trecând acum la triunghiuri particulare, avem:

1. Triunghiul ABC este dreptunghiu în A.

Cum $A' = 90^0 - \frac{A}{2}$, rezultă $A' = 45^0$.

cu alte cuvinte triunghiul $A'B'C'$ este semidreptunghiu.

Ținând seamă de relația din triunghiul dreptunghiu:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

se transformă pentru triunghiul semidreptunghiu:

$$a'^2 = b'^2(\cos 2B' + 1) + c'^2(\cos 2C' + 1).$$

Pentru alte relații ce se pot obține între elementele triunghiului semidreptunghiu A' B' C' a se vedea articolul *„O transformare a relațiilor trigonometrice"*, al d-lui *Cezar Ivănescu*, publicat în R. M. T., anul XV, No. 2.

Putem adăugă în baza relațiilor din Partea I-a a articolului de față, că triunghiul ortic al triunghiului semidreptunghiu este un triunghiu dreptunghiu.

2. Se observă că triunghiul A' B' C' nu poate fi niciodată un triunghiu dreptunghiu.

Intr'adevăr punând condiția ca $A' = 90^0$, rezultă:

$$90^0 = 90^0 - \frac{A}{2}, \quad \text{de unde} \quad \frac{A}{2} = 0,$$

ce este un non sens.

3. Triunghiul A B C este isoscel (B = C).

Cum

$$B' = 90^0 - \frac{B}{2} \quad \text{și} \quad C' = 90^0 - \frac{C}{2},$$

rezultă că,

$$B' = C',$$

deci și triunghiul A' B' C' este un triunghiu isoscel.

Deasemenea dacă triunghiul A B C este un triunghiu echilateral, analog se demonstrează că și triunghiul A' B' C' este un triunghiu echilateral.

NOTE MATEMATICE

17. — *Une solution à deux paramètres du système diophantien*

$$\begin{cases} x^3 + y^2 = z^2 \\ x + y = t^2. \end{cases}$$

Pour obtenir cette solution nous nous servirons du théorème: *Toutes les solutions rationnelles entières de l'équation*

$$a x^2 + b x y + c y^2 = e z^2,$$

dans laquelle les coefficients sont tous entiers, avec $e \neq 0$ *et* $b^2 - 4ac \neq$ *carré parfait, peuvent être exprimées comme fonctions quadratiques d'une solution initiale*

$$(\xi, \eta, \xi) \neq (0, 0, 0),$$

savoir

$$x = \varrho[(-a\xi + b\eta)m^2 - 2c\eta mn + c\xi n^2],$$

$$y = \varrho[a\eta m^2 - 2a\xi mn - (b\xi + c\eta)n^2],$$

$$z = \varrho\xi(am^2 + bmn + cn^2);$$

ϱ *est un facteur de proportionnalité,* m *et* n *sont des entiers premiers entre eux.* (voir p. ex. *Dickson*, Introduction to the Theory of Numbers, 1931).

Nous écrirons maintenant la première équation sous la fome

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = z^2.$$

Supposons $x + y$ et $x^2 - xy + y^2$ premiers entre eux; dans ce cas, x et y sont nécessairement premiers entre eux.

Nous aurons donc

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = (tu)^2.$$

L'équation à résoudre est équivalente au système diophantien

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = u^2 \\ x + y = t^2. \end{cases}$$

La première de ces équations admet la solution initiale:

$$\xi = 1, \quad \eta = 0, \quad \xi = 1.$$

La solution complète est donc, en vertu du théorème précédemment énoncé

$$\begin{cases} x = \varrho(m^2 - n^2) \\ y = \varrho(2mn - n^2) \\ u = \varrho(m^2 - mn + n^2). \end{cases}$$

Puisque x et y sont premiers entre eux, ϱ doit être égal à 1. On doit encore résoudre

$$x + y = m^2 + 2mn - 2n^2 = t^2.$$

Solution initiale:

$$\xi' = 1, \quad \eta' = 0, \quad \xi' = 1.$$

Solution complète:

$$\begin{cases} m = p^2 + 2q^2 \\ n = 2pq + 2q^2 \\ t = p^2 + 2pq - 2q^2. \end{cases}$$

Donc, finalement

$$\begin{cases} x = p(p-2q)(p^2+2pq+4q^2) \\ y = 4q(p+q)(p^2-pq+q^2) \\ t = p^2+2pq-2q^2 \\ z = (p^2+2pq-2q^2)(p^4-2p^3q+6p^2q^2+4pq^3+4q^4) \end{cases}$$

Exemple:

$p=5,\ q=2;\quad x=305=5.61,\quad y=1064=2^3.7.19$

$$305^3+1064^3=35113^2\ (=1.232.922.769)$$

$$305+1064=37^2\ (=1.369).$$

Si $x+y$ et x^2-xy+y^2 ont un facteur commun (non carré), ce facteur ne peut être que 3.

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

---

18. — *Rezolvarea în numere întregi a ecuației*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = U^2+V^2.$$

1. Rezolvarea în numere întregi a ecuațiilor diofantine de forma

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = U^2+V^2$$

se poate face foarte ușor, nefiind nevoie pentru aceasta de cât de cunoașterea soluțiilor

$$m(p^2+q^2),\quad 2mpq,\quad m(p^2-q^2)$$

a ecuației pitagorice clasice

$$X_1^2 = U^2+V^2,$$

la care de fapt se reduce ecuația (1) atunci când luăm $n=1$.

2. Să începem prin a considera însă, cazul particular imediat superior celui precedent și anume cazul în care $n=2$. Aceasta numai pentru o mai bună înțelegere a metodei.

Avem deci, ecuația:

$$(2)\qquad x^2+y^2=u^2+v^2,$$

a cărei rezolvare în numere întregi, este o problemă echivalentă determinării soluțiilor raționale admise de ecuația desomogenizată

$$(3)\qquad X^2+Y^2-U^2=1,$$

obținută din prima, atunci când punem:

$$X=\frac{x}{v},\quad Y=\frac{y}{v},\quad U=\frac{u}{v}.$$

Or, la ecuația (3) putem satisface, luând:

$$X = ch\,\varphi\cos\psi,$$
$$Y = ch\,\varphi\sin\psi,$$
$$U = sh\,\varphi,$$

iar cum reprezentările parametrice ale funcțiunilor circulare și hiperbolice ce se deduc din proprietățile lor fundamentale

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1,\qquad ch^2\beta-sh^2\beta=1,$$

analoage ecuației pitagorice desomogenizată sunt respectiv:

$$\cos\alpha=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2},\qquad ch\,\beta=\frac{a^2+b^2}{2ab},$$

$$\sin\alpha=\frac{2pq}{p^2+q^2},\qquad sh\,\beta=\frac{a^2-b^2}{2ab},$$

rezultă că avem:

$$\begin{cases} X=\dfrac{(a^2+b^2)(p^2-q^2)}{2ab(p^2+q^2)}, \\ Y=\dfrac{pq(a^2+b^2)}{ab(p^2+q^2)}, \\ U=\dfrac{a^2-b^2}{2ab} \end{cases}$$

și prin urmare soluțiile întregi ale ecuației (2) sunt:

$$\begin{cases} x=m(a^2+b^2)(p^2-q^2), \\ y=2mpq(a^2+b^2), \\ u=m(a^2-b^2)(p^2+q^2), \\ v=2mab(p^2+q^2). \end{cases}$$

3. Trecând acum la cazul general al ecuației (1), este ușor de văzut că desomogenizând ecuația prin introducerea notațiilor:

$$X_i=\frac{x_i}{V},\qquad (i=1,2,3\ldots n)$$

$$U=\frac{u}{V},$$

ecuația:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = U^2+1$$

este satisfăcută, după cum uşor se constată, atunci când luăm:

$$X_i = ch\,\alpha \underset{n-i+1}{\sin \alpha} \prod_{\lambda=1}^{n-i} \cos \alpha_\lambda$$

$$U = sh\,\alpha \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

şi convenind ca să luăm:

$$\sin \alpha_n = 1.$$

Având acum în vedere reprezentările parametrice ale funcţiunilor circulare:

$$\sin \alpha_i = \frac{2\,a_i\,b_i}{a_i^2 + b_i^2},$$

$$\cos \alpha_i = \frac{a_i^2 - b_i^2}{a_i^2 + b_i^2},$$

precum şi acelea ale funcţiunilor hiperbolice:

$$\operatorname{sh} \alpha = \frac{a^2 - b^2}{2\,a\,b},$$

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{a^2 + b^2}{2\,a\,b},$$

obţinem:

$$\begin{cases} X_i = \dfrac{a^2 + b^2}{2\,a\,b} \cdot \dfrac{2\,a_{n-i+1}\,b_{n-i+1}}{a_{n-i+1}^2 + b_{n-i+1}^2} \displaystyle\prod_{\lambda=1}^{n-i} \frac{a_\lambda^2 - b_\lambda^2}{a_\lambda^2 + b_\lambda^2}, \\ U = \dfrac{a^2 - b^2}{2\,a\,b}, \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots n) \end{cases}$$

cari putându-se se scrie sub forma:

$$\begin{cases} X_i = \dfrac{a^2 + b^2}{2\,a\,b} \dfrac{2\,a_{n-i+1}\,b_{n-i+1}}{\displaystyle\prod_{\lambda=1}^{n} (a_\lambda^2 + b_\lambda^2)} \displaystyle\prod_{\lambda=n-i+2}^{n} (a_\lambda^2 + b_\lambda^2) \prod_{\lambda=1}^{n-i} (a_\lambda^2 - b_\lambda^2), \\ U = \dfrac{a^2 - b^2}{2\,a\,b}, \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots n) \end{cases}$$

ne arată că soluţiile întregi admise de ecuaţia generală (1) sunt:

$$\begin{cases} x_i = 2m(a^2 + b^2)\,a_{n-i+1} \cdot b_{n-i+1} \displaystyle\prod_{\lambda=n-i+2}^{n} (a_\lambda^2 + b_\lambda^2) \prod_{\lambda=1}^{n-i} (a_\lambda^2 - b_\lambda^2), \\ u = m(a^2 - b^2) \displaystyle\prod_{\lambda=1}^{n} (a_\lambda^2 + b_\lambda^2), \\ v = 2\,m\,a\,b \displaystyle\prod_{\lambda=1}^{n} (a_\lambda^2 + b_\lambda^2) \end{cases}$$

şi deci că ele depind de $2n+3$ parametrii întregi, arbitrari.

OVIDIU A ENULESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVI, No. 1, Septemvrie 1940. Lista Membrilor Societăţii *„Gazeta Matematică"*. Membrii decedaţi. † *Preduţa Bungeţeanu*, de *P. Sergescu*. Proprietăţi ale conicelor osculatoare la o curbă plană, de *N. Abramescu*. Premii, burse şi publicaţii din veniturile Societăţii *„Gazeta Matematică"*. Note matematici, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Pozitiva*, Revistă de Matematici, Anul I, No. 1, Septemvrie 1940. Cuvânt înainte. Lista membrilor. Asupra împărţirei polinoamelor, de *G. G. Constantinescu*. Funcţiuni poligonale, de *O. Enulescu*. Asupra curbelor plane, de *C. Ionescu-Bujor*. Geometrie cinematică, de *N. N. Mihăileanu*. Note matematice, exerciţii şi probleme propuse. Dată fiind lista membrilor şi a comitetului de redacţie, avem credinţa că această revistă va fi de un folos real celor ce o vor cerceta.

3. *Dr. Ing. C. Stăncescu*. Aluminiul în industrie şi aviaţie. (Extras din „Revista Institutul Român de Energie".

4. *N. Praporgescu*. Sur une classe d'équations intégrales et leurs applications à la statistique. (Extrait du „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique, Bucarest", X-ème année (1938 – 1939).

5. Prof Ing. *C. Severineanu* şi Dr. Ing. *Şt. Nadaşan:* Contribuţii la studiul ruperei osiilor de automotor.

6. *I. G. Murgulescu* und *E. Laţiu*. Direkte konduktometrische Methoden. (Sonderdruck aus „Zeitschrift für Elektrochemie", 1940).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 361. — *Să se găsească un număr de trei cifre, ştiind că triplul produsului cifrelor este egal cu suma cuburilor lor, iar suma cifrelor este un cub perfect.*

C-TIN I STANCIULESCU

Fie a_1, a_2, a_3 cifrele numărului căutat. Conform enunţului

$$(1) \qquad a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = 3\,a_1\,a_2\,a_3,$$

$$(2) \qquad a_1 + a_2 + a_3 = n^3.$$

Când $a_1 = a_2 = a_3$ relaţia (1) devine o identitate ceiace înseamnă că se pot găsi soluţii între numerele de 3 cifre, cu cifrele egale.

In acest caz, după (2), avem

$$3\,a_1 = n^3.$$

BIBLIOTECA ASTRA SIBIU

Maximul lui $3a_1$ fiind 27 înseamnă că n^3 trebuie căutat între numerele 1, 8 şi 27. Cum numai 27 se divide prin 3, avem numai soluţia 999.

Când $a_1 < a_2 < a_3$ şi anume

$$a_2 = a_1 + b, \qquad a_3 = a_1 + c,$$

atunci găsim

$$S_3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = [3a_1^3 + 3a_1^2 b + 3a_1^2 c] + 3a_1[b^2 + c^2] + b^3 + c^3,$$

$$P_3 = 3a_1 a_2 a_3 = [3a_1^3 + 3a_1^2 b + 3a_1^2 c] + 3a_1[bc].$$

De oarece

$$b^2 + c^2 > bc$$

se vede din S_3 şi P_3 că, $S_3 > P_3$. Neavând egalitate între S_3 şi P_3 nu avem soluţie în cazul $a_1 < a_2 < a_3$.

Se vede din S_3 şi P_3 că şi în cazul când unul din numerele b sau c este nul, deci când două din cifrele a_i sunt egale, nu avem soluţie, căci $S_3 \geqq P_3$.

Notă. 1°. Enunţul iniţial aşa cum a fost publicat la pag. 78, Vol. IV, nu preciza numărul cifrelor numărului de căutat. Această generalizare atrage căutarea soluţiilor întregi ale ecuaţiei

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = 3a_1 a_2 \ldots a_n,$$

ceiace este o problemă care iese din cadrul elementar al *R. M. T.* şi care nici nu cred că se poate rezolva.

2°. Au găsit soluţia 999 pe diferite căi d-nii: *Beşchea N., Botea G. N., Comănescu Al., Gârleşteanu N., Georgescu N. I, Georgescu-Val I., Grofsoreanu L. Gh., Grubermann I. G, Iacob St. E., Iliescu St. V, Ionescu-Bujor Th. A., Marinescu S. D., Nicolae Cr., Popa Gh. I, Popescu N. Corn., Popovici C. I., Purdilă C.. Roman I, Stănescu I. A., Ţanovici V. C., Tărăbuţă C. P.* şi *Tăraş V.*

Gh. B.

Problema 1757. — *Să se arate că:*

$$2\frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} 2b - \operatorname{cotg} 2a - \operatorname{cotg} 2b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b - \operatorname{cotg} a - \operatorname{cotg} b} = 1 - \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} 2b.$$

LT. C. D IONESCU-ŢIU

Soluţie. Ţinând seamă că

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

primul membru al identităţii cerute, pe care să-l notăm cu E, se poate scri succesiv:

$$(1) \quad E = 2\frac{\dfrac{\sin 2(a+b)}{\cos 2a \cos 2b} - \dfrac{\sin 2(a+b)}{\sin 2a \sin 2b}}{\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} - \dfrac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}}$$

$$= 2\frac{\sin 2(a+b)[-\cos 2(a+b)]}{\sin(a+b)[-\cos a + b)]} \times \frac{\cos a \cos b \sin a \sin b}{\cos 2a \cos 2b \sin 2a \sin 2b}.$$

Ţinând încă seamă că,

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha,$$

relaţia (1) devine succesiv, făcând simplificările ce se impun:

$$E = \frac{\sin 2(a+b)\cos 2(a+b)}{\sin 2(a+b)} \times \frac{\sin 2a \sin 2b}{\sin 2a \cos 2b \sin 2b \cos 2a} = \frac{\cos 2(a+b)}{\operatorname{ces} 2a \cos 2b} =$$

$$\frac{\cos 2a \cos 2b - \sin 2a \sin 2b}{\cos 2a \cos 2b} = 1 - \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} 2b.$$

In felul acesta identitatea cerută este stabilită,

Au dat soluţii bune, d-na *Abramescu Pop Mariana*, d-ra *Checian Ana* (lic. Carmen Sylva, Timişoara) şi d-nii: *Andrievici N.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Bakonyi C.* (lic. Timişoara), *Bârlea V. Suhăţeanu* (lic Milit., N. Filipescu), *Buznea D. Dinu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cazanacli V. Petre* (Ismail), *Cherţman Mozes* (Giurgiu), *Chintescu Matei* (lic. Milit., N. Filipescu), *Christea I. Nicolae* (lic. Blaj), *Drăgilă Pavel* (Cluj), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Goga Florian*, *Jidanu I. C.* (Şc. Polit, Timişoara) *Luca I. I.* (lic. Arad), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Mărgărit I. Nicolae* (Bucureşti), *Mocanu I. C-tin* (lic. Milit, Cernăuţi), *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Nicola Gheorghe* (Institutul Român, Sofia), *Peltechi M.* (Inst. Român, Sofia), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Simon Petru* (lic. Arad), *Tica P. Marin-Gall, Venter D-tru* şi *Vijelie Gh. Eugen* (lic. Milit., N. Filipescu).

Problema 1760. — *Scriind o cifră şi de două ori cifrele patratului ei, putem obţine un patrat perfect de cinci cifre.*

ŞTEFAN C. TILICA

Urmând indicaţiile din enunţ, patratul căutat se va afla numai printre numerele:

41616	74949
52525	86464
63636	98181.

Numerile 63636, 74949 nu pot fi patrate perfecte, fiindcă sunt divizibile prin 3 fără a fi şi prin 9.

Dintre celelalte, singurul patrat perfect este

$$41616 = 204^2,$$

care ne dă singura soluție a problemei.

Soluții date de d-rele: *Checian Ana* (lic. Carmen Sylva, Timișoara), *Papadopol Demetra D. Elena* (lic. Bacău) și de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timișoara), *Boiangiu D. D-tru* (lic. T-Severin), *Cazanacli V. Petre* (Ismail), *Cherțman Mozes* (lic. Giurgiu), *Cristea I. Nicolae* (lic. Blaj), *Caraianu Iancu* (Institutul Român, Sofia), *Damianov Damian* (Institutul Român, Sofia), *Deheleanu I. Gheorghe* (lic. Beiuș), *Drăgilă Pavel* (Cluj), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Hermann Carol* (Blaj), *Jidanu I. C.* (Șc. Polit., Timișoara), *Logofătu M. Ioan* (lic. Beiuș), *Luca I. I.* (lic. Arad), *Lucovici Bronislav* (Institutul Român. Sofia), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt.), *Pătruță Chiril* (Inst. Român, Sofia), *Peltechi Mihai* (Inst. Român, Sofia), *Popescu Corneliu* (Giurgiu), *Schapira Salo* (lic. P-Neamț), *Tica P. Marin-Gall, Văduva F. Marin* (lic. Giurgiu), *Venter D-tru* și *Vijelie Eugen* (lic. Milit, N. Filipescu).

Problema 1761. — *Dacă*

$$A = \frac{x^3+y^3}{x-y}, \qquad B = \frac{x^3-y^3}{x+y},$$

$$C = \frac{3(x^4+y^4)^2 + x^2y^2(x^2+y^2)^2}{2(x^2-y^2)(x^4+y^4)},$$

avem relația:

$$(A+B-C)^2 = (A-C)(B-C).$$

N. N. MIHAILEANU

Soluție. Relația de demonstrat se reduce la

$$A^2+AB+B^2 = C(A+B).$$

Dacă efectuând calculul

$$\frac{A^2+AB+B^2}{A+B},$$

vom găsi pe C, problema va fi rezolvată.

Dar,

$$A^2+AB+B^2 = \frac{(x^3+y^3)^2}{(x-y)^2} + \frac{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}{(x+y)(x-y)} + \frac{(x^3-y^3)^2}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{(x^3+y^3)^2(x+y)^2 + (x^6-y^7)(x^2-y^2) + (x^3-y^3)^2(x-y)^2}{(x^2-y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^8+3y^8+8x^4y^4+x^2y^6+x^6y^2}{(x^2-y^2)^2}$$

$$= \frac{3(x^4+y^4)+x^2y^2(x^2+y^2)^2}{(x^2-y^2)^2}$$

și

$$A+B = \frac{x^3+y^3}{x-y} + \frac{x^3-y^3}{x+y} =$$

$$\frac{(x^3+y^3)(x+y)+(x^3-y^3)(x-y)}{x^2-y^2} = \frac{2(x^4+y^4)}{x^2-y^2},$$

deci:

$$\frac{A^2+AB+B^2}{A+B} = \frac{3(x^4+y^4)+x^2y^2(x^2+y^2)^2}{2(x^2-y^2)(x^4+y^4)}.$$

Cum ultimul membru este tocmai *C*, urmează că relația cerută este stabilită.

Soluții analoage date d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timișoara). *Buznea D. Dinu* (lic Milit, N. Filipescu), *Cazanacli V. Petre* (Ismail), *Cristea I. Nicolae* (lic. Blaj), *Jidanu I. C.* (lic. Cernăuți), *Luca I. I.* (lic. Arad), *Mocanu I. C.* (lic. Cernăuți), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Șimon S. Petru* (lic. Arad) și *Tilică C. Ștefan* (Șc. Milit. de Geniu).

Problema 1765. — *Să se facă calculabilă prin logaritmi următoarea expresiune:*

$$E = \frac{\alpha\sin x + \beta\cos x + \beta}{\alpha\cos x - \beta\sin x - \beta}.$$

E. S. MODALCA

Soluție. Impărțind termenii fracției cu β și determinând un unghiu φ, astfel ca

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha}{\beta},$$

expresiunea dată se poate scri succesiv

$$E = \frac{\sin x\operatorname{tg}\varphi + \cos x + 1}{\cos x\operatorname{tg}\varphi - \sin x - 1} =$$

$$\frac{\sin x\sin\varphi + \cos x\cos\varphi + \cos\varphi}{\cos x\sin\varphi - \sin x\cos\varphi - \cos\varphi} =$$

$$\frac{\cos(\varphi-x)+\cos\varphi}{\sin(\varphi-x)-\cos\varphi} =$$

$$\frac{\cos\frac{x}{2}\cos(\varphi-\frac{x}{2})}{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\sin(\varphi-\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})},$$

fiindcă

$$\sin(\varphi-x) = \cos(\frac{\pi}{2}-\varphi+x).$$

Soluții analoage date de d-na *Abramescu Pop Mariana* și de d-nii: *Bighea Ion* (lic. Sibiu). *Cristea I. Nicolae* (lic. Blaj), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Șimon S Petru* (lic. Arad), *Tilică C. Ștefan* (Șc. Milit. de Geniu) și *Văduva F, Marin* (lic Giurgiu).

Problema 1774. — *Dacă*

$$x=\frac{b\lambda}{b-\mu},\qquad y=\frac{a\mu}{a-\lambda}$$

avem şi

$$\frac{\lambda}{a}-\frac{\mu}{b}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)},$$

unde $x=a\operatorname{tg}\alpha$, $y=b\operatorname{tg}\beta$.

N. N. MIHAILEANU

Primele două relaţii, ordonate în raport cu λ şi μ, se mai pot scri:

$$\begin{cases} b\lambda+x\mu=bx \\ y\lambda+a\mu=ay. \end{cases}$$

Rezolvind acest sistem în raport cu λ şi μ, obţinem:

$$\begin{cases} \lambda=\dfrac{ax(b-y)}{ab-xy} \\ \mu=\dfrac{by(a-x)}{ab-xy}. \end{cases}$$

De aci deducem succesiv, dacă ţinem seamă de valorile lui x, y din enunţ şi de unele transformări obicinuite:

$$\frac{\lambda}{a}-\frac{\mu}{b}=\frac{ab(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)}{ab(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}=$$

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

Relaţia din enunţ este astfel stabilită.

Soluţii bune date de d-na *Mariana Abramescu Pop* şi de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timişoara), *Buznea D. Dinu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Calciu Ghenade* (lic. Institutul Român, Sofia), *Cazanacli V. Petre* (Ismail), *Cristea I. Nicolae* (lic. Blaj), *Damianof Ştefan* (lic. Institutul Român, Sofia), *Goga Florian, Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Mocanu I. C.* (lic. Cernăuţi), *Nicola Gheorghe* (lic. Institutul Român, Sofia), *Pătruţă Chiril* (lic. Institutul Român, Sofia), *Popescu Corneliu* (Giurgiu), *Popovici Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Simon Ş. Petru* (lic. Arad), *Staicu I.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tica P. Marin-Gall, Venter D-tru, Vijelie Gh. Eugen* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Voştinariu Gheorghe*.

1778. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} ax(y+b)^2=by(x+a)^2 \\ ax+by=a^4-b^4. \end{cases}$$

IONEL I. STAMATE

Soluţie. Dezvoltând calculele în prima ecuaţie obţinem:

$$axy^2+2abxy+ab^2x=bx^2y+2abxy+a^2by,$$

sau

$$xy(ay-bx)+ab(bx-ay)=0.$$

Această ecuaţie se mai poate scri încă,

$$(ay-bx)(xy-ab)=0.$$

Observăm că sistemul dat este echivalent cu următoarele două sisteme de ecuaţii:

$$(1)\begin{cases} ay-bx=0 \\ ax+by=a^4-b^4, \end{cases}\qquad (2)\begin{cases} xy=ab \\ ax+by=a^4-b^4. \end{cases}$$

Rezolvirea sistemului (1). Dacă înmulţim prima ecuaţie cu a, a 2-a cu b şi adunăm, obţinem:

$$(a^2+b^2)y=b(a^4-b^4),$$

deci,

$$y=b(a^2-b^2)$$

şi atunci rezultă, înlocuind această valoare în prima ecuaţie din (1),

$$x=a(a^2-b^2).$$

Sistemul (1) admite astfel sistemul de soluţii

$$(1')\qquad \begin{cases} x=a(a^2-b^2) \\ y=b(a^2-b^2). \end{cases}$$

Rezolvirea sistemului (2). Din prima ecuaţie din (2), avem

$$(3)\qquad y=\frac{ab}{x},$$

valoare, care înlocuită în a 2-a ecuaţie din (2), ne dă

$$ax+\frac{ab^2}{x}=a^4-b^4,$$

sau,

$$ax^2-(a^4-b^4)x+ab^2=0.$$

De aci deducem

$$x=\frac{a^4-b^4\pm\sqrt{(a^4-b^4)^2-4a^2b^2}}{2a}.$$

Inlocuind această valoare a lui x în (3), obţinem:

$$y=\frac{2a^2b}{a^4-b^4\pm\sqrt{(a^4-b^4)^2-4a^2b^2}}=$$

$$\frac{a^4-b^4\mp\sqrt{(a^4-b^4)^2-4a^2b^2}}{2b}.$$

Sistemul (2) admite astfel sistemele de soluţii,

$$(2')\quad \begin{cases} x = \dfrac{a^4 - b^4 \pm \sqrt{(a^4 - b^4)^2 - 4a^2b^2}}{2a} \\ y = \dfrac{a^4 - b^4 \mp \sqrt{(a^4 - b^4)^2 - 4a^2b^2}}{2b} \end{cases},$$

semnele superioare şi inferioare, acolo unde avem dublu semn, se corespund.

Sistemele de soluţii (1') şi (2') sunt sistemele de soluţii ale sistemului de ecuaţii, dat.

Soluţie bune date de d-nii: *Andrievici N.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Bakonyi C.* (lic Loga, Timişoara), *Boiangiu D.* (lic. T-Severin), *Buznea D. Dinu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Cazanacli V. Petre* (Ismail), *Cristea I. Nicolae* (lic. Blaj), *Deheleanu I. Gheorghe* (lic. Beiuş), *Gligor N. Ioan* (lic Arad), *Jidanu I. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Logăfătu M. Ioan* (lic. Beiuş), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Mihoc N. Ovidiu* (bacalaureat), *Modâlca S Emil* (lic. T-Severin), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Popovici Mircea* (Şc. Polit, Timişoara), *Şerban I. C-tin* (lic. Milit, N. Filipescu), *Sorian Oscar* (Şc. Polit., Timişoara), *Tica P. Marin-Gall* (Sub-Lt.) şi *Tilică C. Ştefan* (Şc. Milit. de ofiţer de geniu).

PROBLEME PROPUSE

1882. — Se cer numerile N compuse din factorii 2, 3 şi 5 a căror indicatori sunt patrate perfecte de trei cifre.

Care este forma generală a numerilor suprimând condiţia ca patratele să fie de trei cifre.

EMILIAN MEREUTA

1883. — Să se găsească o progresie geometrică de 11 termeni, ştiind că produsul termenilor este 2048 şi că suma termenilor de rang 6, 8, 10 este de două ori mai mică decât suma termenilor de rang 7, 9, 11.

CORNELIA NANES

1884. — Să se rezolve în numere întregi sistemul:

$$\begin{cases} xyz + (x-1)(y-1)(z-1) = 6 \\ (x+y+z)(xyz-1) = 30 \\ \Sigma x(y-1) + \Sigma x^2 yz = 41. \end{cases}$$

HARITON NENCIULESCU

1885. — Să se demonstreze formula:

$$C_m^n = C_k^0 C_{m-k}^n + C_k^1 C_{m-k}^{n-1} + C_k^2 C_{m-2}^{n-2} + \cdots$$

$$\cdots + C_k^{k-2} C_{m-k}^{n-k+2} + C_k^{k-1} C_{m-k}^{n-k+1} + C_k^k C_{m-k}^{n-k},$$

k fiind un număr care satisface condiţiei $k \leq m - n$.

EUGEN VISA

1886. — Pe o parabolă dată se consideră punctele fixe A, B şi un mobil M. Se cere condiţia ca perpendiculara pe mijlocul lui AM să se întâlnească cu BM pe axa parabolei, în vreme ce perpendiculara pe mijlocul lui BM se întâlneşte cu AM pe tangenta în vârful parabolei.

G-L GH. BUICLIU

1887. — Să se rezolve ecuaţia:

$$(\sin x + \operatorname{cosec} x)^2 + (\cos x + \sec x)^2 + (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2 = 25.$$

CPT. C. V. COSTACHESCU

1888. — Notaţiile fiind cele obicinuite, să se arate că în orice triunghiu există relaţia:

$$\Sigma \operatorname{cotg}^n \frac{A}{2} = p^n \frac{\Sigma r_a^n r_b^n}{a^n b^n c^n \cos^n \dfrac{A}{2} \cos^n \dfrac{B}{2} \cos^n \dfrac{C}{2}}.$$

IONEL I. STAMATE

1889. — Se cere transformata rombică a cercului

$$\varrho = a \sin \alpha,$$

dându-se unghiul de transformare φ, $(0 \leq \varphi \leq \pi)$.

V. ALACI

Observare. Autorul notei *n-rul* 16 din numărul trecut al „R. M. T." este d-l prof. *Ştefan Musta.*

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collaborations se publient en Allemand, Anglais, Espagnol Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié: 286 articles, 249 notes et 1892 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIII, s'a primit la Redacția „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Prof. Ion Rizescu.* Str. Mihăileanu 18, Constanța.
2. *Prof. Constantin Borș.* Str. Petru Rareș 85, Piatra Neamț.
3. D-l *Marin I. Popa,* Licențiat în Matematici. Bulevardul Alexandru I. Cuza 20, București II.
4. *Dr. Michail St. Botez,* profesor, Str. I. G. Duca 15, Piatra Neamț.
5. *Stelian Cetățeanu,* Calea Serban-Vodă 108, București.

Legându-se colecția R. M. T., anul XIX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Figurile ce însotesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

A apărut volumul:

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ

de

VALERIU ALACI

Profesor, Școala Politechnică, Timișoara.

Lucrare premiată de „ACADEMIA ROMÂNĂ"

272 pagini — Prețul: 180 Lei.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte și să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XIX, cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenții, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

ANUL XX. NOEMVRIE 1940 No. 9.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **MIHAIL BOTEZ:** RELAȚIUNI INTR'UN POLIGON REGULAT.
2. **C. BORS:** CURBE ARMONICE.
3. NOTE MATEMATICE: 19, 20, 21.
4. CHESTIUNI DE EXAMEN.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 289, 1752, 1753, 1768, 1779, 1783, 1786
7. PROBLEME PROPUSE: 1890-1897.
8. INFORMAȚIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebuie să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile, din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ȚIȚEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ștefan Nadașan** (Laboratorul de Rezistența Materialelor), Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii și cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN, Școala Politechnică, Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este pentru anul XX, de 200 (două sute) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIX inclusiv, broșate, 120 lei fiecare.

ANUL XX — No. 9 TIMISOARA, NOEMVRIE 1940

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

RELAȚIUNI INTR'UN POLIGON REGULAT

DE MIHAIL BOTEZ

Să considerăm un poligon regulat cu n laturi. Numărul diagonalelor ce se pot duce din același vârf a poligonului este $\mu = n - 3$.

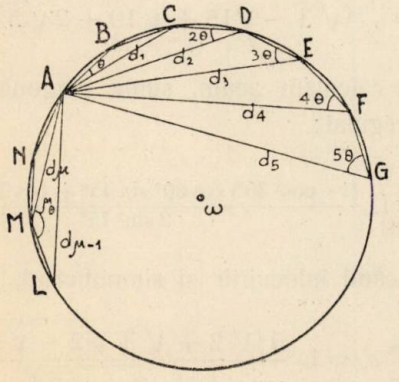
Unghiul α, pe care îl fac între ele două laturi ale poligonului, fiind:

$$\alpha^0 = \frac{\pi(n-2)}{n}$$

unghiul dintre două diagonale consecutive, sau dintre ultima sau prima diagonală și latura lor adiacentă va fi:

$$\theta^0 = \frac{\alpha^0}{\mu+1} = \frac{\pi}{n}.$$

Se ține seama că unghiurile poligonului sunt unghiuri înscrise și se socotesc ca atare.



Fie acum poligonul: ABC...LMN, cu n laturi egale.

Dacă unghiul pe care-l face prima diagonală cu una din laturile sale adiacente este θ, atunci unghiurile celorlalte diagonale d_2, d_3 cu laturile respective, vor fi:

$$\sphericalangle d_1 . \overline{BC} = \theta$$

$$\sphericalangle d_2 . \overline{CD} = 2\theta$$

$$\sphericalangle d_3 . \overline{DE} = 3\theta.$$

. . . . . .

Să considerăm triunghiurile, în care s'a împărțit poligonul prin diagonalele duse. Observăm că vom avea următorul șir de egalități:

$$d_1 = 2L\cos\theta$$
$$d_2 = d_1\cos\theta + L\cos 2\theta$$
$$\vdots$$
$$d_\mu = d_{\mu-1}\cos\theta + L\cos\mu\theta,$$

în care L este latura poligonului. Aceste relațiuni se mai pot scrie:

$$d_1 = 2L\cos\theta$$
$$d_2 = 2L\cos^2\theta + L\cos 2\theta$$
$$d_3 = 2L\cos^3\theta + L\cos\theta\cos 2\theta + L\cos\theta.$$
$$\vdots$$

(A)
$$d_{\mu-1} = 2L\cos^{\mu-1} + L\cos^{\mu-3}\theta\cos 2\theta + \cdots + L\cos^2\theta\cos(\mu-2)\theta + L\cos(\mu-1)\theta,$$
$$d_\mu = 2L\cos^\mu\theta + L\cos^{\mu-2}\theta\cos 2\theta + \cdots + L\cos\theta\cos(\mu-1)\theta + L\cos\mu\theta.$$

Ținând seama că diagonalele echidistante sunt egale, obținem următorul șir de egalități:

(B) $d_1 = d_\mu$, $d_2 = d_{\mu-1}$, $d_3 = d_{\mu-2}$ ... etc.

Valoarea ce se scoate din aceste egalități pentru unghiul θ, va trebui să verifice egalitatea:

$$\theta = \frac{\pi}{n}.$$

În adevăr, să luăm cazul unui poligon cu 6 laturi, vom avea:

$$d_1 = d_3,$$

sau:

$$2\cos\theta = 2\cos^3\theta + \cos\theta\cos 2\theta + \cos 3\theta,$$

unde făcând toate reducerile:

$$3 = 4\cos^2\theta,$$

sau:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

valoare ce verifică relația

$$\theta^0 = \frac{\pi}{n} = \frac{180^0}{6} = 30^0.$$

Îmi propun, acum să calculez suma acestor diagonale. Pentru aceasta observ că această sumă este produsul următoarelor șiruri:

$$s_1 = 2\,L(1 + \cos\theta + \cos^2\theta + \cos^3\theta + \cdots)$$

$$s_2 = \cos\theta + \frac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots)$$

Adică:

$$\sum_{i=1}^{\mu} d_i = \left[2\,L(1 + \cos\theta + \cos^2\theta + \cdots + \cos^\mu\theta)\right]\times$$

$$\left[\cos\theta + \frac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos\mu\theta)\right].$$

Să calculăm acum sumele s_1 și s_2:

$$s_1 = 2\,L(1+\cos\theta\cos^2\theta + \cdots + \cos^\mu\theta) = 2\,L\frac{\cos^{\mu+1}\theta - 1}{\cos\theta - 1}.$$

Pentru a calcula pe s_2, țin seama că:

$$\cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos\mu\theta = \frac{\cos\frac{\mu+1}{2}\theta\sin\frac{\mu\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} - \cos\theta,$$

astfel că făcând toate reducerile în partea doua a egalității, obținem:

$$\cos\theta + \frac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos\mu\theta) = \frac{\cos\frac{\mu+1}{2}\theta\sin\frac{\mu\theta}{2} + \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

De unde urmează:

$$\sum_1^{\mu} d_i = 2\,L\frac{\cos^{\mu-1}\theta - 1}{\cos\theta - 1}\cdot\frac{\cos\frac{(\mu+1)\theta}{2}\sin\frac{\mu\theta}{2} + \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Înlocuind,

$$\cos\theta - 1 = -(1 - \cos\theta) = -2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

simplificând și înmulțind cu -1 și numărătorul și numitorul primei fracțiuni, obținem expresiunea sumei diagonalelor poligonului:

$$(C)\quad \sum_{i=1}^{\mu} d_i = L\frac{(1-\cos^{\mu+1}\theta)\left[\cos\frac{\mu+1}{2}\theta\sin\frac{\mu\theta}{2} + \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\right]}{2\sin^3\frac{\theta}{2}}.$$

Aplicație. a. Să calculăm lungimea primei diagonale (d_1) a unui pentadecagon regulat. Vom considera poligonul înscris într'un cerc de rază egală cu 1. Laturile poligoanelor cu 15 laturi ce se pot forma, sunt date de rădăcinile primitive ale ecuației:

$$x^{15} - 1 = 0.$$

Să considerăm latura poligonului ordinar ce se obține, unind din una în una diviziunile respective:

$$l_{15} = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - \sqrt{15} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}),$$

diagonala va fi dată de prima din relațiile (A):

$$d_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{15} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})\cos 12^0.$$

b. Să calculăm acum, suma diagonalelor unui exgon regulat:

$$\sum_1^3 d_i = L\frac{(1 - \cos^4 30^0)\cos 60^0\sin 45^0 + \cos 30^0\sin 15^0)}{2\sin^3 15^0},$$

unde făcând înlocuirile și simplificând, găsim:

$$\sum_1^3 d_i = L\frac{7(\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{2 - \sqrt{3}})}{16(\sqrt{2} - \sqrt{3})^3}.$$

CURBE ARMONICE

De C. BORŞ.

Numesc curbe armonice, curbele pe suprafaţă, care au proprietatea că dealungul lor raza de curbură normală în fiecare punct este media armonică a razelor principale de curbură în acel punct

$$\frac{1}{\varrho} = (r_1 + r_2),$$

unde r_1, r_2, sunt respectiv curbura normală şi razele principale de curbură.

Calculez $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, notând

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 2H, \qquad \frac{1}{r_1 r_2} = K$$

$2H$ şi K fiind respectiv curbura medie şi totală a suprafeţei,

$$\frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{H}{K}.$$

Ecuaţia diferenţială a curbelor armonice va fi:

$$\frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2} = \frac{H}{K}$$

$$(1) \quad (EK - LH)\,du^2 + 2(FK - MH)\,du\,dv + (GK - NH)\,dv^2 = 0.$$

Prin fiecare punct al suprafeţei trec câte două curbe armonice, câte una din fiecare familie.

Stabilesc câteva propietăţi ale acestor curbe:

1. *Pe suprafeţele W (Weingarten) definite de relaţia*

$$(2) \quad K + 3H^2 = 0$$

şi pe suprafeţele desfăşurabile $K = 0$ ceie două familii de curbe armonice se confundă.

In adevăr, condiţia ca cele două direcţii ale curbelor armonice date de (1) să coincidă este:

$$(FK - MH)^2 - (EK - LH)(GK - NH) = 0$$

calculând:

$$K(K + 3H^2) = 0,$$

care are două soluţii:

a. $K = 0$ care este ecuaţia diferenţială a suprafeţelor cu toate punctele parabolice (suprafeţe desfăşurabile.

b. $K + 3H^2 = 0$, o suprafaţă W.

2. *Pe suprafeţele minime şi pe suprafeţele riglate cu generatoare izotrope, una din familiile liniilor armonice coincide cu o familie de linii minima.*

Exclud cazul când liniile minima sunt confundate ($EG - F^2 = 0$), adică clasa suprafeţelor izotrope desfăşurabile (muchia de intoarcere a unei desfăşurabile izotrope este o curbă minima)[1].

Iau ca linii de coordonate liniile minima. In acest caz $E = G = 0$, $F \neq 0$.

Ecuaţia curbelor armonice este

$$(3) \quad LH\,du^2 - 2(FK - MH)\,du\,dv + NH\,dv^2 = 0,$$

pun condiţia ca $v =$ constant să fie şi linie armonică, adică să satisfacă ecuaţia diferenţială (3):

$$LH = 0.$$

a. $H = 0$ reprezintă suprafetele minime.

b. $L = 0$. Arăt că în acest caz suprafeţele corespunzătoare sunt riglate cu generatoare izotrope.

In adevăr

$$L = (\bar{r}_u\,\bar{r}_v\,\bar{r}_{uu}) = 0,$$

deci vectorii $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$, $\bar{r}_{uu}$ sunt coplanari, adică există o relaţie liniară

$$(4) \quad \bar{r}_{uu} = \alpha\,\bar{r} + \beta\,\bar{r}_v$$

înmulţind scalar această relaţie cu $\bar{r}_u$:

$$\bar{r}_u\,\bar{r}_{uu} = \alpha\,\bar{r}_u^2 + \beta\,\bar{r}_u\,\bar{r}_v$$

$$\tfrac{1}{2}E_u = \alpha E + \beta F,$$

dar

$$E = 0, \qquad F \neq 0$$

după presupunerea făcută.

Relaţia (4) devine

$$\bar{r}_{uu} = \alpha\,\bar{r}_u,$$

adică curbele $v =$ constant sunt linii drepte şi fiind minima, sunt izotrope.

Generatoarele suprafeţelor riglate izotrope, sunt în acelaşi timp una din familiile liniilor minima şi armonice.

3. *Suprafeţele pe care ambele familii de linii armonice sunt linii minima, sunt sferele şi suprafeţele minima.*

---

[1]) *Vessiot*, Leçons de Géométrie supérieure.

Trebue să am

$$\frac{E}{EK-LH}=\frac{F}{FK-MH}=\frac{G}{GK-NH},$$

liniile minima fiind linii de coordonate $E=G=0$, deci

$$LH=0, \quad NH=0.$$

a. $H=0$ suprafețe minima

b. $L=N=0$, adică

$$(\bar{r}_u\,\bar{r}_v\,\bar{r}_{uu})=(\bar{r}_u\,\bar{r}_v\,\bar{r}_{vv})=0$$

$$\bar{r}_{uu}=\alpha\,\bar{r}_u+\beta\,\bar{r}_v$$

$$\bar{r}_{vv}=\alpha_1\,\bar{r}_u+\beta_1\,\bar{r}_v$$

și după raționamentul de la nr. 2, $u=$ constant, $v=$ constant sunt linii drepte și fiind minima, sunt izotrope. Suprafața este deci o sferă.

4. *Pe suprafețele desfășurabile și pe suprafețele riglate cu generatoare izotrope, una din familiile liniilor armonice este o familie de asimptotice.*

Luând ca linii coordonate liniile asimptotice, am $L=N=0$. Ecuația curbelor armonice este

$$(5)\quad EK\,du^2+2(FK-MH)\,du\,dv+GK\,dv^2=0.$$

Punând condiția ca linia $v=$ constant să fie linie armonică, adică să satisfacă ecuația diferențială (5):

$$EK=0.$$

a. $K=0$. Generatoarele (asimptoticile) suprafețelor desfășurabile sunt curbe armonice.

b. $E=0$. Sunt suprafețele pe care $v=$ constant satisface

$$2F\,du\,dv+G\,dv^2=0,$$

adică $v=$ constant este curbă minima coincizând cu o familie de asimptotice. Ori aceste suprafețe sunt *riglate (nedesfășurabile)* cu generatoare izotrope. [1]

5. *Singurile suprafețe pe cari ambile familii de linii armonice sunt linii asimptotice, sunt sferele și suprafețele desfășurabile* (suprafețe cu două sisteme de generatoare izotrope).

Condiția de coincidență este

$$\frac{L}{EK-LH}=\frac{M}{FK-MH}=\frac{N}{GK-NH},$$

ținând seamă că $L=N=0$,

$$EK=GK=0.$$

a. $K=0$ ecuația diferențială a suprafețelor desfășurabile.

b. $E=G=0$, $u=$ constant și $v=$ constant, satisfac ecuația curbelor minima

$$2F\,du\,dv=0,$$

acestea coincizând cu asimptoticele, alcătuesc două sisteme de generatoare izotrope. Suprafața e o sferă.

Această ultimă proprietate se poate deduce din proprietatea (3) și din propietatea cunoscută:

Liniile asimptotice sunt minima pe sferă (generatoarele izotrope).

6. *Pe suprafețele W definite de relația*

$$3r_2+r_1=0,$$

una din familiile liniilor armonice coincide cu una din familiile liniilor de curbură.

In adevăr, luând liniile de curbură ca linii de coordonate

$$F=M=0,$$

ecuația liniilor armonice este

$$(EK-LH)\,du+(GK-NH)\,dv=0$$

și punând condiția ca $u=$ constant să fie linie armonică, am

$$\frac{G}{N}=-\frac{H}{K}, \quad \text{adică} \quad 3r_2+r_1=0.$$

7. Luând liniile armonice de linii coordonate, am:

$$\frac{E}{L}=\frac{G}{N}=\frac{H}{K}.$$

Pe orice suprafață raportată la liniile armonice, curburile totală și medie sunt proporționale respectiv cu N și G, L și E.

[1] *Vessiot*, Leçons de Géométrie supérieure.

NOTE MATEMATICE

19. — *Quelques chaînes multigrades.*

J'ai donné dans la *Revista Matematica de Timișoara* (décembre 1939, pp. 125—128) des théorèmes généraux sur les chaînes multigrades. A l'aide de ces théorèmes j'ai établi les égalités multigrades ci-après:

A. 4, 4, 8, 9, 14, 16, 19, 21, 21, 23, 29, 40 $\overset{x}{=}$
1, 1, 1, 3, 4, 11, 20, 24, 26, 28, 31, 36 $\overset{x}{=}$
6, 8, 9, 11, 16, 16, 16, 19, 23, 24, 25, 41.

$(x = 2, 4)$. $S_2 = 4842$, $S_4 = 4181526$.

On peut en tirer l'égalité vraie aux degrés 2 et 4

4, 4, 14, 21, 21, 29, 40 $\overset{x}{=}$ 6, 11, 16, 16, 24, 25, 41

$S_2 = 3551$, $S_4 = 3695171$.

. . . . . .

B. Voici une chaîne septigrade à 3 maillons avec 26 termes par maillon:

1, 28, 31, 63, 75, 79, 104, 137, 150, 152, 162,
164, 166, 212, 224, 228, 253, 285, 286,
290, 299, 311, 315, 346, 355, 373 $\overset{x}{=}$
3, 26, 31, 50, 79, 104, 112, 113, 137, 152, 164,
166, 175, 199, 228, 253, 261, 262, 285,
286, 290, 315, 324, 348, 355, 371 $\overset{x}{=}$
8, 12, 40, 59, 70, 95, 113, 121, 143, 146, 157,
173, 175, 208, 219, 244, 262, 270, 276,
295, 299, 306, 324, 346, 357, 371

$(x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$.

$S_1 = 5089 = 7727$,
$S_2 = 1301917$,
$S_3 = 370905193$

C. Voici encore deux autres chaînes septigrades renferment 23, resp. 21 termes dans le 1-er maillon et 24 dans les deux autres:

349, 287, 262, 249, 187, 162, 138, 113, 51, 38,
13, —2, —49, —62, —64, —87, —89, —211,
—213, —236, —238, —298, —300 $\overset{x}{=}$
347, 298, 249, 247, 198, 151, 149, 102, 53, 51,
2, —2, —4, —47, —51, —53, —100, —102,
—198, —200, —247, —249, —296, —298 $\overset{x}{=}$
333, 326, 233, 226, 207, 193, 107, 93, 74, 67,
—16, —18, —23, —25, —26, —33, —142,
—144, —156, —158, —275, —277, —282, —284

$(x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

$S_1 = 0$, $S_2 = 838924$, $S_3 = 13494600$.

D. 247, 198, 198, 147, 100, 100, 98, 98, 51,
—2, —49, —49, —49, —51, —51, —147,
—147, —149, —149, —196, —198 $\overset{x}{=}$
243, 220, 172, 143, 126, 120, 78, 72, 55, 26,
—4, —6, —22, —27, —29, —45, —75, —77,
—121, —123, —169, —171, —192, —194 $\overset{x}{=}$
240, 226, 163, 140, 135, 126, 72, 63, 58, 35,
—7, —9, —21, —23, —28, —42, —84, —86,
—112, —114, —175, —177, —189, —191.

$(x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

$S_1 = 0$, $S_2 = 380484$, $S_3 = 8906436$.

On peut supprimer dans les deux derniers exemples les nombres opposés qui figurent dans un même maillon; il subsistera une chaîne vraie aux quatre premiers degrés impairs 1, 3, 5, 7.

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

---

20. — *Asupra problemei 1760.*

Soluția dată acestei probleme la pag. 101 în No. 8 al R. M. T. nu este complectă.

Prin enunț se cere *a se găsi un patrat de cinci cifre format scriind o cifră și de două ori cifrele patratului acelei cifre*, fără a se preciza ordinea în care sunt scrise o cifră a și cifrele patratului $a^2 = bc$. Soluția de la pagina 101 se ocupă numai de cazul

$$N^2 = abcbc \quad \text{unde} \quad a^2 = bc.$$

Dacă însă se examinează toate cazurile posibile de formare a unui număr cu 3 cifre a, b, c, atunci se găsesc următoarele 5 soluțiuni:

$108^2 = 11664$ cu $4^2 = 16$; $129^2 = 16641$ cu $4^2 = 16$;

$141^2 = 19881$ cu $9^2 = 81$; $204^2 = 41616$ cu $4^2 = 16$;

$235^2 = 55225$ cu $5^2 = 25$.

Pentru rezolvare se poate urma calea pe care am întrebuințat-o la pag. 85, *Gazeta Matematică*, Vol. XLVI, cu ocazia rezolvării problemei 4605.

G-L GH. BUICLIU

---

21. — *Das Gleichungssystem*

$$\begin{cases} 2(a^v + b^v) = x + y + z + w \\ 2(a^{2v} + b^{2v}) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \\ 2(a^{3v} + b^{3v}) = x^3 + y^3 + z^3 + w^3. \end{cases}$$

I. Durch die Formel

$$2(m^2 + p^2)^2 = (m^2 - 2mp - p^2)^2 + (m^2 + 2mp - p^2)^2$$

bekommt man Solutionen der Gleichungen

$$G^2 + G^2 = H^2 + K^2.$$

Gilt aber

$$G^2 + G^2 = H^2 + K^2,$$

dann gilt nach einem allgemeinen Theorem der Zahlentheorie für beliebiges T auch die Identität

$$(T - G)^n + (T - G)^n + (T + G)^n + (T + G)^n =$$
$$(T - K)^n + (T - H)^n + (T + H)^n + (T + K)^n$$

für $n = 1, 2, 3$, so, dass sich Identitäten von der Form

$$A, A, B, B \overset{n}{=} C, D, E, F \qquad (n = 1, 2, 3)$$

ergeben.

II. Wir wählen nun a, b, v so, dass $b > a$ und dass sowohl $\frac{b^v + a^v}{2}$ als auch $\frac{b^v - a^v}{2}$ durch G teilbar ist. Nun multiplizieren wir die Gleichung

$$G^2 + G^2 = H^2 + K^2 \text{ mit } \frac{b^v - a^v}{2G}$$

und bekommen die Relation

$$\left(\frac{b^v - a^v}{2}\right)^2 + \left(\frac{b^v - a^v}{2}\right)^2 =$$
$$\left[H\left(\frac{b^v - a^v}{2G}\right)\right]^2 + \left[K\left(\frac{b^v - a^v}{2}\right)\right]^2.$$

Setzen wir nun

$$T = \frac{b^v + a^v}{2},$$

dann gibt

$$T - \left(\frac{b^v - a^v}{2}\right)$$

die Zahl a^v und

$$T + \left(\frac{b^v - a^v}{2}\right)$$

gibt die Zahl b^v. Also gibt

$$\left[T - \left(\frac{b^v - a^v}{2}\right)\right]^n + \left[T - \left(\frac{b^v - a^v}{2}\right)\right]^n +$$
$$\left[T + \left(\frac{b^v - a^v}{2}\right)\right]^n + \left[T + \left(\frac{b^v - a^v}{2}\right)\right]^n =$$
$$\left[T - K\left(\frac{b^v - a^v}{2G}\right)\right]^n + \left[T - H\left(\frac{b^v - a^v}{2G}\right)\right]^n +$$
$$\left[T + H\left(\frac{b^v - a^v}{2G}\right)\right]^n + \left[T + K\left(\frac{b^v - a^v}{2G}\right)\right]^n,$$

für $n = 1, 2, 3$ Solutionen des vorgelegten Gleichungssystems.

III. *Exempel:*

$$m = 3,\ p = 1 \text{ gibt } 5^2 + 5^2 = 1^2 + 7^2.$$

Wir gehen von dieser Relation aus und setzen

$$a = 1.5 = 5 \text{ und } b = 3.5 = 15,\ v = 7.$$

Dann ist

$$T = \frac{5^7 + 15^7}{2} = 85468750;$$

es ergibt sich nach unserer Formel das Resultat

$$\begin{cases} 2(5^7 + 15^7) = (-34078125) + 68390625 \\ \qquad + 102546875 + 205015625 \\ 2(5^{14} + 15^{14}) = (-34078125^2 + 68390625^2 \\ \qquad + 102546875^2 + 205015625^2 \\ 2(5^{21} + 15^{21}) = (-34078125)^3 + 68390625^3 \\ \qquad + 102546875^3 + 205015625^3. \end{cases}$$

IV. *Anmerkung* (Konsequenzen).

1. Gilt die Relation

$$\begin{cases} 2(a^v + b^v) = x + y + z + w \\ 2(a^{2v} + b^{2v}) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \\ 2(a^{3v} + b^{3v}) = x^3 + y^3 + z^3 + w^3, \end{cases}$$

dann gilt auch

$$\begin{cases} 4[a^{2v} + b^{2v} + 2(ab)^v] = (x + y + z + w)^2 \\ 4[a^{4v} + b^{4v} + 2(ab)^{2v}] = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2 \\ 4[a^{6v} + b^{6v} + 2(ab)^{3v}] = (x^3 + y^3 + z^3 + w^3)^2. \end{cases}$$

2. Es gilt auch für beliebiges h die Identität

$$\begin{cases} 2(a^v+b^v)+(x+h)+(y+h)+(z+h)+(w+h)= \\ \quad x+y+z+w+2[(a^v+h)+(b^v+h)] \\ 2(a^{2v}+b^{2v})+(x+h)^2+(y+h)^2+(z+h)^2+(w+h)^2= \\ \quad x^2+y^2+z^2+w^2+2[(a^v+h)^2+(b^v+h)^2] \\ 2(a^{3v}+b^{3v})+(x+h)^3+(y+h)^3+(z+h)^3+(w+h)^3= \\ \quad (x^3+y^3+z^3+w^3+2[(a^v+h)^3+(b^v+h)^3] \\ 2(a^{4v}+b^{4v})+(x+h)^4+(y+h)^4+(z+h)^4+(w+h)^4= \\ \quad x^4+y^4+z^4+w^4+2[(a^v+h)^4+(b^v+h)^4]. \end{cases}$$

ALFRED MOESSNER
(Nürnberg)

CHESTIUNI DE EXAMEN
ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Examenul de admitere în anul I.
Lucrări scrise, 28 şi 29 Octomvrie 1940.

GEOMETRIE.

(Luni, 28 Octomvrie, orele 8—11).

I.

Se consideră triunghiul A B C având $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle ACB$. Perpendiculara ridicată în A pe A C întâlneşte dreapta C B în punctul M. 1°. Să se arate că:

$$\overline{CM} = 2\,\overline{AB}.$$

2°. Presupunând $\sphericalangle ACB = 36^0$, se construiesc dreptele B N şi B P care împart unghiul A B M în trei părţi egale, punctele N şi P fiind pe dreapta A M.

Să se arate, că paralela dusă prin N la dreapta C P trece prin O mijlocul segmentului C M;

Că dreapta A O este bisectoarea unghiului B A C.

3°. Perpendiculara ridicată în O pe C B taie pe A C în punctul R. Să se arate, că dreapta M R este o *bisectoare* a unghiului A M C.

(Cele două drepte, care trecând prin vârful unui unghiu îl împart în trei părţi egale, se numesc trisectoarele unghiului).

4°. In acest caz particular ($\sphericalangle ACB = 36^0$) să se calculeze volumul înăscut din rotirea triunghiului A B M în jurul axei A C, lungimea segmentului A B fiind egală cu $2a$.

ALGEBRĂ.

(Luni, 28 Octomvrie, orele 3 - 6).

I.

Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinele ecuaţiunei

$$x^3 + x^2 + px + q = 0.$$

Să se găsească ecuaţia de gradul al 3-lea ale cărei rădăcini sunt:

$$y_1 = 1 - \frac{1}{x_1^2}, \quad y_2 = 1 - \frac{1}{x_2^2}, \quad y_3 = 1 - \frac{1}{x_3^2}.$$

Să se rezolve ecuaţia dată şi cea obţinută, în cazul $p = q = 1$.

II.

Se cere maximul sau minimul funcţiunii care se obţine luând derivata a 2-a a următoarei funcţiuni:

$$y = \frac{2\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x} - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}\sin x}{1+2\cos x}\right).$$

III.

Să se determine a astfel ca ecuaţia

$$x^4 - 8x^3 + 23x^2 - ax + 12 = 0,$$

să aibă suma a două rădăcini, egală cu suma celorlalte două.

Punând pentru a valoarea găsită, să se rezolve ecuaţia dată.

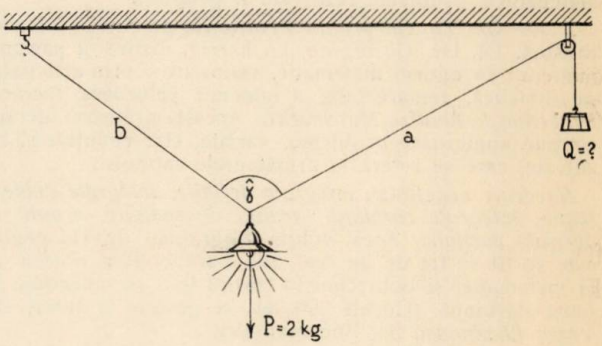
MECANICĂ ŞI TRIGONOMETRIE.

(Marţi, 29 Noemvrie, orele 8—11).

1. O lampă de greutate P=2 kg este suspendată conform schiţei de mai jos.

Se cere să se determine greutatea Q, care o ţine în echilibru ştiind că:

P=2 kg, $a = 0.445$ m, $b = 0.325$ m, $\bar{\gamma} = 104^0\,03'\,07''$.



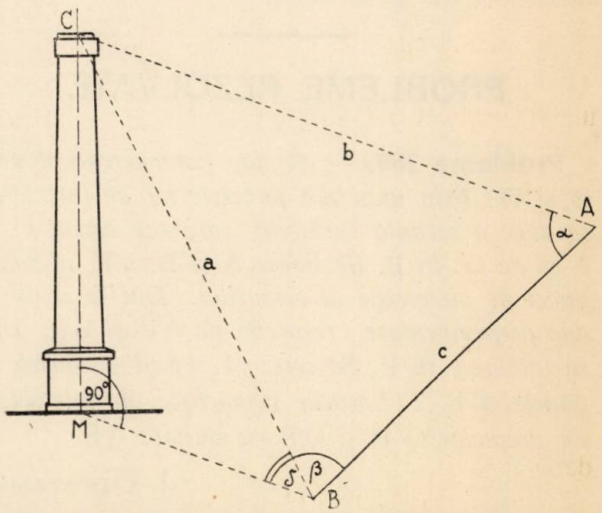
2. Să se rezolve sistemul:

$$\sin x + 2\cos y = 1, \qquad x + y = 360^0$$

3. Să se determine înălţimea unui coş de fabrică, făcându-se măsurătorile respective conform schiţei:

$\hat{\alpha} = 22^0\,37'\,12''$, $\hat{\beta} = 30^0\,30'\,37''$, $\hat{\delta} = 73^0\,44'\,23''$

$c = 156$ m.



4. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresiunea

$$E = \sin 2(B - A) + \sin 2(C - B) + \sin 2(A - C).$$

5. Să se verifice identitatea

$$\frac{\cos a + \cos 3a}{\sin 3a - \sin a} = \cot a.$$

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* Anul XLVI, No 2, Octomvrie 1940. † *Ion Banciu,* de *D. Barbelian.* Proprietăţi ale conicelor osculatoare la o curbă plană, de *N. Abramescu.* Asupra problemei 4385, de *N. Abramescu.* Asupra problemei 4385, de *M. Ghermănescu.* Despre curbele sincrone în legătură cu o lucrare a lui *E. Bacaloglu,* de *Florica Câmpan.* Note matematice, probleme rezolvate şi propuse

2. *Pozitiva,* Anul I, No. 2, Octomvrie 1940. Despre şirurile monotone, de *Tiberiu Popoviciu.* Funcţiuni poligonale, de *V. Alaci.* Asupra funcţiunilor poligonale, de *Stelian Cetăţeanu.* Funcţiuni poligonale, de *Har. Ionescu-Biss.* Curbe asociate unei curbe strâmbe, de *C. Ionescu-Bujor.* Curbe raţionale *Ţiţeica,* de *Alex. Niculescu.* Asupra tangentelor, normale ale cubicelor, de *R. P. Voinea.* Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

3. Dr. *Gh. Th. Gheorghiu* **Probleme de Analiză Matematică.** Dl. Dr. *Gheorghiu,* un harnic, distins şi pasionat muncitor în ogorul matematic, cunoscut şi prin activitatea sa didactică, remarcabilă, a întocmit valoroasa lucrare: *Probleme de Analiza Matematică.* Aceasta preţioasă lucrare, conţine numeroase probleme, variate, clar enunţate şi rezolvate, care se referă la următoarele capitole:

Integrale nedefinite, integrale definite, integrale duble şi triple, integrale curbilinii, ecuaţii diferenţiale, ecuaţii cu derivate parţiale. Acest volum litografiat, de 344 pagini, este sortit să fie de un real folos studenţilor nostrii de la matematici şi politechnici cărora le-o recomandăm cu toată stăruinţa. (Costul 200 lei, se găseşte la autor, str. *Vatra Luminoasă* 55, Bucureşti IV).

4. *Mihail St. Botez.* Sur le problème de la projection bicentrale dans un espace à quatre dimensions. (Extrait du Bulletin Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara, T. 9, Fasc. 3—4).

5. *Mihail St. Botez.* Asupra polinomului lui *Abel.* (Extras din *„Pitagora“*, An. V, No. 3).

6. *Mihail St. Botez.* Asupra unor sume trigonometrice. (Extras din *„Pitagora“, An. V).*

PROBLEME REZOLVATE

Problema 289. — *Se dau două cercuri secante* O şi O′. *Prin unul din punctele lor de intersecţie se duce o secantă variabilă, care tae cercul* O *în* A *şi pe* O′ *în* B. *Se unesc* A *şi* B *cu* R, *al doilea punct de intersecţie al cercurilor. Din* O *şi* O′ *se duc perpendiculare, respectiv pe* AR *şi* BR, *care se întâlnesc în* P. *Se cere:* 1. *Locul geometric al punctului* P. 2. *Locurile geometrice ale intersecţiilor dreptelor* O′P *şi* OP *cu secanta* AB.

I. COSEREANU

1. Notăm cu D şi E intersecţiile lui OP şi O′P cu AR şi BR. Patrulaterul RDPE având unghiurile din D şi E drepre este inscriptibil, deci

$$1) \qquad \sphericalangle OPO' + \sphericalangle DRE = \pi.$$

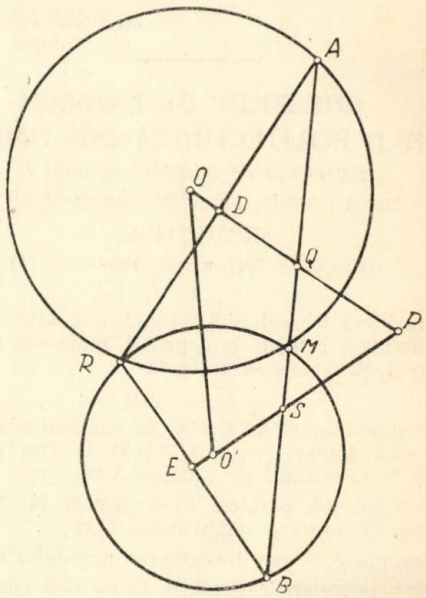
Dar unghiurile RAM şi RBM din triunghiul RAB sunt constante, având măsura lor constantă, jumătate din arcul AB, respectiv în cercurile O şi O′, deci şi unghiul

$$\sphericalangle ARB = \sphericalangle DRE$$

din triunghiul ARB este constant, aşa, că (1) dă

$$\sphericalangle OPO' = C' = \theta,$$

ceia ce arată că punctul P descrie un segment de cerc capabil de unghiul θ, descris pe OO′.



2. Fie Q şi S intersecţiile lui AB cu OP şi O′P, iar M intersecţia cercurilor O, O′, prin care trece AB. In triunghiul QDA avem

$$\sphericalangle DQM = \sphericalangle OQM = \sphericalangle QAD + \frac{\pi}{2} = C',$$

deci Q descrie un segment capabil de acest unghiu constant descris pe OM. De asemeni S descrie un segment capabil de unghiul constant

$$\sphericalangle SBE + \frac{\pi}{2}$$

descris pe O′M.

Soluţiuni geometrice bune s-au primit de la d-nii: *Agapescu M. N., Bărglăzan A., Botea G. N., Ciorănescu I. C., Dinescu Fl., Dorneanu S. V., Ionescu I. P., Lepădatu M., Manolescu I. N., Mihăileanu N. N., Nestor G. D., Pătroianu I. M., Petrescu P. Gh., Râmniceanu I. Cr. Savin C. I., Scripcă L., Ştefănescu Em. şi Weiss S.*

S-au primit bune soluţiuni prin geometria analitică de la d-nii: *Coşniţă C., Mihăileanu N. N., Oniţiu Fl.* şi *Petrescu P. Gh.*

G-l Gh. B.

Problema 1752. — *Să se afle patratele de forma $aabcd$ în care acd este patrat perfect, iar $b+c=a$.*

SUB-LT CORNELIU LUPESCU

Soluţie. Patratele acd, în care $c \leqq a$ cum reiasă din enunţ, sunt:

100, 225, 324, 400, 441, 529, 625,
729, 841, 900, 961.

Pentru fiecare dintre aceste numere de forma acd, relaţia din enunţ, care se poate scri $b=a-c$, ne dă respectiv pentru b următoarele valori:

1, 0, 1, 4, 0, 3, 4, 5, 4, 9, 3,

astfel că patratele de forma $aabcd$ trebuie să se găsescă printre numerile:

(1) 11100, 22025, 33124, 44400, 44041, 55329, 66425, 77529, 88441, 99900, 99361.

Numerile 11100, 44400, 55329, 77529 din şirul (1) fiind divizibile prin 3, fără a fi şi prin 9, nu sunt patrate perfecte.

Dintre numerile rămase din şirul (1) numai 33124 este patrat perfect,

$$33124 = 182^2,$$

şi ne dă singura soluţie a problemei.

Au rezolvat problema d-ra *Papadopol-Demetra Elena* (lic. de fete, Bacău şi de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timişoara), *Boiangiu D. D-tru* (lic. T-Severin), *Borneas Marius* (lic. Arad), *Cherţman S. M.* (lic. Giurgiu), *Cristea I. Nicolae* (lic Blaj), *Cazanacli V. Petre* (Ismail), *Chintescu M. Matei* (lic. Milit., N. Filipescu). *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Hermann I. Carol* (Blaj), *Jidanu I. C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Mihoc Ovidiu* (bacalaureat), *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Peltechi Mihai* (lic. Inst. Român, Sofia), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Sorian Oscar* (Şc. Polit., Timişoara), *Tilică C. Ştefan* (Şc. Ofiţeri de Geniu), *Ţarălungă Savel* (lic. Internat, Iaşi) şi *Văduva F. Marin* (lic. Giurgiu).

Problema 1753. — *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, care înmulţit cu 9, să se reproducă la produs răsturnat şi tot patrat perfect.*

IONEL I. STAMATE

Soluţie. Patratul cerut înmulţit cu 9 trebuind să dea un număr de patru cifre, n'ar putea fi cel mult de cât 1111. Pe de altă parte patratul cerut având şi el patru cifre, urmează să fie cuprins între 1000 şi 1111.

Dar între aceste numere sunt numai două patrate perfecte

$$32^2 = 1024, \qquad 33^2 = 1089.$$

Acum constatăm că,

$$1024 \times 9 = 9216,$$

nu satisface enunţul; însă

$$1089 \times 9 = 9801,$$

satisface enunţul întru cât 9801 este inversul lui 1089.

Patratul de patru cifre cerut este astfel, 1089.

Soluţii date de d-nii: *Boiangiu D-tru* (lic. T-Severin), *Cazanacli V. Petre* (Ismail), *Cherţman S. M.* (Giurgiu), *Cristea I. N.* (lic. Blaj), *Drăgilă Pavel* (Cluj), *Luca I. I.* (lic. Arad), *Mărgărit I. Nicolae* (Bucureşti), *Modâlcă S. Emil* (lic. T-Severin), *Schapira Salo* (lic. Piatra-Neamţ), *Segal Zigu* (lic. Vaslui) şi *Văduva F. Marin* (lic. Giurgiu).

Problema 1768. — *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, care să fie în acelaşi timp de formele mult. $3+1$, mult. $4+1$, mult. $5+1$.*

IONEL I. STAMATE

Soluţie. Fie N patratul cerut. Conform enunţului, rezultă că $N-1$ este divizibil prin 3, 4 şi 5.

Numerile de patru cifre divizibile prin 5 sunt de forma $abc0$ şi $abc5$. Numerile de forma $abc5$ însă, nu pot fi divizibile prin 4. Rămân dar, numai numerile de forma $abc0$ care pot fi divizibile prin 4 şi numai dacă luăm $c=0$, $c=2$, $c=4$ şi $c=8$.

Rezultă din cele expuse că patratele cerute N sunt de forma

$$ab01, \quad ab21, \quad ab41, \quad ab81.$$

Numerile acestea trebuind să fie patrate perfecte şi fiind terminate cu 1, urmează că rădăcina lor patrată este de forma $10z+1$, sau $10z+9$, astfel că trebuie să avem:

(1) $N=(10z+1)^2=100z^2+20z+1=$
$ab01, \quad ab21, \quad ab41, \quad ab81$

şi

(2) $N=(10z+9)^2=100z^2+180z+81=$
$ab01, \quad ab21, \quad ab41, \quad ab81.$

Trebuie să determinăm pe z, care evident trebuie să fie $\geqq 3$, pentru ca N să fie de patru cifre.

1°. Pentru ca $(10z+1)^2$ să fie de forma $ab01$ şi de patru cifre trebuie să luăm $z=5$ şi atunci

$N = 51^2 = 2601$, dar acest număr nefiind mult. $3+1$, cum cere enunțul, nu este soluție a problemei.

2°. Pentru ca $(10z+1)^2$ să fie de forma $\overline{ab21}$ și de patru cifre, trebuie $z=6$, și atunci $N=61^2=3721$, care fiind de forma mult. $3+1$, este o soluție a problemei.

3. Pentru ca $(10z+1)^2$ să fie de forma $\overline{ab41}$ și de patru cifre, trebuie ca $z=7$ și atunci $N=71^2=5041$, care fiind de forma mult. $3+1$, este o soluție a problemei.

4°. Pentru ca $(10z+1,^2$ să fie de forma $\overline{ab81}$ și de patru cifre, trebuie ca $z=4$ și $z=9$. Pentru $z=4$ avem $N=41^2=1681$, care fiind mult. $3+1$, este soluție, iar pentru $z=9$ avem $N=91^2=8281$, care fiind mult. $3+1$, este iarăși soluție a problemei.

5°. Pentru ca $(10z+9,^2$ să fie de forma $\overline{ab01}$ și de patru cifre, trebuie ca $z=4$ și $z=9$. Pentru $z=4$, avem $N=49^2=2401$, care fiind mult. $3+1$, este o soluție a problemei, iar pentru $z=9$, avem $N=99^2=9801$, care nefiind de forma mult. $3+1$, nu este soluție a problemei.

6°. Pentru ca $(10z+9)^2$ să fie de forma $\overline{ab21}$ și de patru cifre, trebuie ca $z=3$ și $z=8$. Pentru $z=3$, avem $N=39^2=1521$, care nefiind mult. $3+1$, nu este soluție, iar pentru $z=8$, avem $N=89^2=7921$, care fiind de forma mult. $3+1$, este soluție a problemei.

7. Pentru ca $(10z+9)^2$ să fie de forma $\overline{ab41}$ și de patru cifre, trebuie ca $z=7$ și atunci $N=79^2=6241$, care fiind de forma mult. $3+1$, este soluție a problemei.

8°. Pentru ca $(10z+9)^2$ să fie de forma $\overline{ab81}$ și de patru cifre, trebuie ca $z=5$ și atunci $N=59^2=3481$, care fiind de forma mult. $3+1$, este soluție a problemei.

Avem astfel următoarele opt patrate de câte patru cifre, asezate în ordine crescândă, care satisfac enunțul problemei:

1681, 2401, 3481, 3721, 5041, 6241, 7921 și 8281.

Soluții date de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timișoara), *Borneas Marius* (Șc. Polit., Timișoara), *Bârlea V. Suhățeanu* (Colegiul Milit., N. Filipescu), *Cazanacli V. Petre* (Ismail), *Cherțman S. M.* (lic. Giurgiu), *Cristea I. Nicolae* (Șc. Polit, Timișoara), *Jidanu C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Tilică C. Ștefan* (elev, ofițer geniu), *Țarălungă Savel* (lic. Internat, Iași), *Văduva F. Marin* (lic. Girrgiu) și *Venter D-tru.*

Problema 1779. — *Să se calculeze derivata funcțiunii*

$$y=\frac{\sqrt{1-x^4}+\sin x}{x^2+\cos x}$$

și să se arate că această derivată se poate scri sub forma:

$$y'=\frac{\sqrt{1-x^4}-2x}{\sqrt{1-x^4}\,(1-\sqrt{1-x^4}\sin x+x^2\cos x)}\,.$$

GH TH. GHEORGHIU

Soluție. Derivata funcțiunii date este de forma,

$$y'=\frac{M}{N}\,,$$

unde avem succesiv,

$$M=(x^2+\cos x)\left(\cos x-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}\right)$$

$$-(\sin x+\sqrt{1-x^4})(2x-\sin x)=x^2\cos x+\cos^2 x$$

$$-\frac{2x^5}{\sqrt{1-x^4}}-\frac{2x^3\cos x}{\sqrt{1-x^4}}-2x\sin x-2x\sqrt{1-x^4}$$

$$+\sin^2 x+\sqrt{1-x^4}\sin x=[1+x^2\cos x-2x\sin x)\sqrt{1-x^4}$$

$$-2x^5-2x^3\cos x-2x+2x^5+\sin x$$

$$-x^4\sin x]\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=[(1+x^2\cos x)\sqrt{1-x^4}$$

$$+\sin x(1-x^4)-2x(1+x^2\cos x+\sqrt{1-x^4}\sin x)]$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=\sqrt{1-x^4}(1+x^2\cos x+\sqrt{1-x^4}\sin x)$$

$$-2x(1+x^2\cos x+\sqrt{1-x^4}\sin x)$$

$$=(\sqrt{1-x^4}-2x)(1+x^2\cos x$$

$$+\sqrt{1-x^4}\sin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,,$$

iar

$$N=(x^2+\cos x)^2=x^4+2x^2\cos x+\cos^2 x$$

$$=x^4+2x^2\cos x+1-\sin^2 x$$

$$=x^4(\sin^2 x+\cos^2 x)+2x^2\cos x+1-\sin^2 x$$

$$=x^4\cos^2 x+2x^2\cos x+1+\sin^2 x(x^4-1)$$

$$=(x^2\cos x+1)^2-(1-x^4)\sin^2 x=$$

$$x^2\cos x+1+\sqrt{1-x^4}\sin x)(x^2\cos x+1-\sqrt{1-x^4}\sin x).$$

Impărțind expresiunile găsite pentru M și N, simplificând apoi, găsim pentru y', valoarea

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^4} - 2x}{\sqrt{1-x^4}(1-\sqrt{1-x^4}\sin x + x^2\cos x)},$$

care este tocmai expresiunea cerută prin enunț.

Soluții date de d-na *Abramescu Pop Mariana* și de d-nii *Cazanacli V. Petre* (Ismail), *Cetățeanu Stelian* (București), *Mahrenholtz Iohannes* (Cottbus), *Modâlcă S. Emii* (T.-Severin), și *Vijelie Gh. Eugen* (Colegiul Milit., N Filipescu)

Problema 1783. — *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin^2 x(5 - \cos^2 x) - \sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0.$$

NICOLAE I. CRISTEA

Soluția autorului. Folosind formulele cunoscute,

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \quad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,$$

ecuația dată devine succesiv:

$$x\sin^2 x(4 + \sin^2 x) - 3\sin x + 4\sin^3 x +$$

$$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0,$$

$$\sin^4 x + 4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 2(\sin^2 x + 2\sin x) + 1 = 0,$$

$$(\sin^2 x + 2\sin x)^2 - 2(\sin^2 x + 2\sin x) + 1 = 0.$$

De aci deducem:

$$\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0,$$

deci

$$\sin x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Nu este acceptabilă de cât soluția:

$$\sin x = -1 + \sqrt{2} = 0{,}41421,$$

de unde urmează

$$x = 24^0,\ 28',\ 9'' + 2k\pi.$$

Soluții date de d-nii: *Andrievici N.* (Colegiul Militar), N. Filipescu), *Bakonyi C.* (lic Loga Timișoara), *Brădeanu Nicolae* (lic. Beiuș), *Cazanacli V. Petre* (Ismail), *Deheleanu I. Gheorghe* (lic. Beiuș), *Goga Florian, Jidanu I. C.* (Șc. Polit. Timișoara). *Logofătu M. Ioan* (lic. Beiuș), *Mahrenholtz Johannes* (Cotbus), *Mocanu I C-tin* (lic. Cernăuți), *Popovici Mircea* (Șc. Polit. Timișoara), *Săruleștea-nu I. Emanoil* (București), *Schapira Salo* (lic. Piatra-Neamț), *Șimon Ș. Petru* (lic. Arad), *Theodorescu N. Dorin* (Șc. Navală), *Tilică C. Ștefan* (Șc. Of. de Geniu), *Venter D-tru* și *Voștinariu Gheorghe*.

Problema 1786. — *Să se discute sistemul:*

$$\begin{cases} ax + ay + z = p \\ x - y + z = q \\ x + ay + az = p. \end{cases}$$

EUGEN VISA

Soluția autorului: Determinantul sistemului dat, anume

$$D = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = -3a^2 + 2a + 1 = -(3a+1)(a-1),$$

se anulează, pentru $a = -\frac{1}{3}$ și $a = 1$,

Vom considera acum următoarele trei cazuri.

Cazul I. Dacă $a \neq -\frac{1}{3}$ și de *1*, atunci $D \neq 0$, iar sistemul este compatibil și bine determinat.

In acest caz găsim pentru sistemul dat soluțiile următoare:

$$\begin{cases} x = \dfrac{p + aq}{3a+1} \\ y = \dfrac{2p - (a+1)q}{3a+1} \\ z = \dfrac{p + aq}{3a+1} \end{cases}$$

Cazul II. Dacă $a = -\frac{1}{3}$, atunci $D = o$.

In acest caz sistemul dat se poate scrie:

$$(2) \qquad \begin{cases} x + y - 3z = -3p \\ x - y + z = q \\ 3x - y - z = 3p \end{cases}$$

Determinantul minor:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

fiind diferit de zero, este determinant principal.

Determinantul caracteristic corespunzător ecuației a 3-a din (2) este:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3p \\ 1 & -1 & q \\ 3 & -1 & 3p \end{vmatrix} = 4(2 - 3p).$$

Deosebim două cazuri:

a. Dacă $q = 3p$, sistemul (2) este compatibil, dar nedeterminat. Din primele două ecuații din (2), obținem în acest caz:

$$\begin{cases} x = z \\ y = 2z - 3p. \end{cases}$$

b. Dacă $q \neq 3p$, sistemul (2) este incompatibil.

Cazul III. Dacă $a = 1$, avem de asemenea $D = 0$, iar sistemul dat devine în acest caz:

$$(3) \quad \begin{cases} x+y+z=p \\ x-y+z=q \\ x+y+z=p, \end{cases}$$

adică același cu sistemul corespunzător din cazul problemei *1500.*

După cum s'a stabilit acolo, sistemul (3) este întotdeauna compatibil, dar neterminat, soluțiile lui fiind:

$$\begin{cases} x = -z + \dfrac{p+q}{2} \\ y = \dfrac{p-q}{2}. \end{cases}$$

Soluții bune date de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timișoara). *Cristea I Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Calciu F. Ghenadi, Damianof Damian* (lic Institutul-Român, Sofia), *Damianof Ștefan* (lic. Institutul-Român, Sofia), *Goga Florian, Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Mihoc N. Ovidiu* (bacalaureat), *Mărgărit I. Nicolae, Modâlcă S. Emil* (T.-Severin), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Șenchi M. Eugen, Ștefanovici I. Mircea* (București), *Tilică C. Ștefan* (Șc of. de geniu și *Voștinariu Gheorghe* (lic. Beiuș).

PROBLEME PROPUSE

1890. — Să se găsească numerile a căror produs prin 195, mărite cu 1, dau patrate perfecte.

IONEL I. STAMATE

1891. — Să se demonstreze identitatea:

$$\Sigma (x-y)(z^5 + x^2 y^3 + x^3 y^2) =$$
$$(x+y+z)(x^4 y - x y^4 + y^4 z - y z^4 + x z^4 - x^4 z).$$

A. GLODEN

1892. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 3x^2 y + x y^2 = 80 \\ y + 6xy + 3x = 48. \end{cases}$$

N. ANDRIEVICI

1893. — Fie A și B două puncte fixe pe axele dreptunghiulare AO, BO și M un punct mobil pe OB. Paralela din B la AM se întâlnește în C cu paralela din M la o direcție dată. Când M se mișcă pe BO, se cere:

1°. Locul intersecțiilor lui MC cu un cerc în C și de rază dată.

2°. Presupunând că MC este paralelă cu AO, se cer intersecțiile cercului cu centru în C și de rază dată, cu un diametru paralel cu o dreaptă Δ.

3°. Caz particular când Δ este paralelă cu BO.

G-L GH. BUICLIU

1894. — Fie M un punct pe arcul BC al cercului circumscris triunghiului ABC și H'_c piciorul înălțimii vârfului C pe cerc. Se construește drepta lui *Simson* a lui M, care taie laturile AB, BC, AC respectiv în γ, α, β.

Dacă P și N sunt punctele unde MH'_c taie respectiv latura AB și dreapta lui *Simson*, să se demonstreze:

1°. Că $P\gamma N$ și $N\gamma M$ sunt isoscele.

2°. Că dreapta *Simson* a lui M, taie în două părți egale dreapta MP, adică $PN = NM$.

EMANUEL I. SARULESTEANU

1895. — Să se facă calculabilă prin logaritmi, expresia:

$$E = \frac{(\sin A - \sin B)^2 + (\cos A - \cos B)^2}{(\sin A + \sin B)^2 + (\cos A + \cos B)^2}.$$

CPT. C V. COSTACHESCU

1896. Să se stabilească relația:

$$\sum \frac{b^2 + c^2 - a^2}{c^2 + a^2 - b^2} \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

LT M. GRUMAZESCU

1897. — Se dă un carton omogen ABCDE, în care ABDE este un patrat de latură AB = 4 cm, iar BCD un semicerc exterior patratului. Din acest carton se taie în colțul A un patrat $AA_1B_1E_1$ cu $AA_1 = 1$ cm; se mai taie din interiorul patratului ABDC un sfert de cerc de rază $r = 2$ cm, cu centru în F mijlocul lui BD și după o rază așezată pe FB.

Se cere să se afle centrul de greutate al cartonului rămas.

V. ALACI

ŞCOALA POLITEHNICĂ TIMIŞOARA

Candidaţii reuşiţi la examenul de admitere în anul preparator, în ordinea clasificaţiei

(Anul şcolar 1940—1941)

1. **David N. Cornel,** Lic. Carol I, Craiova.
2. **Meţiu I. Ioan,** Lic. Decebal din Deva.
3. **Cristea Il. Nicolae,** Lic. Sft. Vasile din Blaj.
4. **Popescu C. Gruia,** Lic. Carol I, Craiova.
5. **Dordea T. Toma,** Lic. Gheorghe Lazăr din Sibiu.
6. **Curiţa I. Maxim Vasile,** Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
7. **Băltan A. Alexandru,** Lic. Gh. Bariţiu din Cluj.
8. **Bartolomeu Gh. Mircea,** Lic. B. P. Haşdeu din Buzău.
9. **Pop Gv. Gavril,** Lic. C. Diaconovici Loga Timişoara.
10. **Stoianovici C. Petre,** Lic. Sam. Vulcan din Beiuş.
11. **Voştinar T. Gheorghe,** Lic. Samuil Vulcan din Beiuş.
12. **Brădeanu N. Nicolae,** Lic. Samuil Vulcan din Beiuş.
13. **Vasilescu M. Iulian,** Lic. Moise Nicoară din Arad.
14. **Ghinea T. Alexandru,** Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila.
15. **Fornade N. Ioan,** Lic. Regele Ferdinand din Turda.
16. **Wenemoser A. Adalbert,** Lic. German de Stat, Timişoara.
17. **Bernath A. Alexandru,** Lic. Durostor din Silistra.
18. **Ciolan I. Radu,** Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
19. **Fleşeriu I. Nicolae,** Lic. Aurel Vlaicu din Orăştie.
20. **Heger I. Ioan,** Lic. Coriolan Brediceanu, Lugoj.
21. **Ioviţiu Tr. Eugen,** Lic. Moise Nicoară din Arad.
22. **Vasile N. Nicolae,** Lic. Industrial din Timişoara.
23. **Brânzei N. Nicolae,** Lic. C. Diaconovici Loga Timişoara.
24. **Pecican M. Matei,** Lic. Moise Nicoară din Arad.
25. **Groza P. Ştefan,** Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
26. **Reusz N. Nicolae,** Lic. Moise Nicoară din Arad.
27. **Jianu C. Tiberiu,** Lic. Traian Doda din Caransebeş.
28. **Lichtscheindl I. Antonie,** Lic. Industrial din Timişoara.
29. **Vogel C. Carol,** Lic. Coriolan Brediceanu, Lugoj.
30. **Băţăţeanu D. Ioan,** Lic .Mircea cel Bătrân, Constanţa.
31. **Ungur V. Vasile Paul,** Lic. Gheorghe Bariţiu din Cluj.
32. **Duschek I. Iuliu,** Lic. Samuil Vulcan din Beiuş.
33. **Fărcăşan Al. Ioan,** Lic. Aplic. Şc. Norm. Sup., Cluj.
34. **Koppes I. Petru,** Lic. Sft. Petru şi Pavel, Ploeşti.
35. **Andru Gh. Coriolan,** Lic. Samuil Vulcan din Beiuş.
36. **Barna N. Nicolae,** Lic. Sft. Vasile din Blaj.
37. **Giurcăneanu E. Dinu,** Lic C.. Diaconovici Loga Timişoara.
38. **Ciortea I. Grigore,** Lic. Al. Papiu Ilarian, Tg.-Mureş.
39. **Chişiu V. Alexandru,** Lic. Diaconovici Loga Timişoara.
40. **Drăgan S. Cornel,** Lic. Gheorghe Bariţiu din Cluj.
41. **Nuţu L. Ioan-Silvestru,** Lic. Aron Pumnul, Cernăuţi.
42. **Trocan I. Dorin,** Lic. Tudor Vladimirescu T.-Jiu.
43. **Cucuiu V. Enea,** Lic. Mihai Viteazul, Alba Iulia.
44. **Drăgoi A. Alexandru,** Lic. băeţi No. 2 din Cluj.
45. **Nicolae T. Vladimir,** Lic. Gheorghe Lazăr din Sibiu.
46. **Petrescu St. Ioan,** Lic. Gheorghe Lazăr din Sibiu.
47. **Andreescu Gh. Simion,** Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
48. **Băiaş M. Vasile,** Lic. Petru Maior din Gherla.
49. **Herlea I. Ioan Carol,** Lic. Mihai Viteazul, Alba Iulia.
50. **Olariu P. Pavel,** Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
51. **Palincaş C. Ştefan,** Lic. C. Diaconovici Loga Timişoara.
52. **Ponoran C. Zeno,** Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
53. **Spălăţelu C. Elena,** Lic. Notre Dafe, Timişoara.
54. **Bogoevici C. Gheorghe,** Lic. Traian Doda din Caransebeş.
55. **Costea T. Raul,** Lic. Eudoxiu Hurmuzachi, Rădăuţi.
56. **Banciu C. Mihai,** Lic. Timotei Cipariu, Dumbrăveni.
57. **Haralamb H. Gh. Florentin,** Lic. Dinicu Golescu, Câmpulung-Muscel.
58. **Mândrean A. Ciprian,** Lic. Eudoxiu Hurmuzachi, Rădăuţi.
59. **Barboni I. Simion,** Lic. Constr. Civ. şi Edilitare Timişoara.
60. **Chinciu Gh. Gheorghe,** Lic. Aurel Vlaicu din Orăştie.
61. **Grihovschi V. C-tin,** Lic. Ştefan cel Mare, Suceava.
62. **Herbeck I. Ioan,** Lic. German de Stat din Timişoara.
63. **Borza N. Ioan,** Lic. Aurel Vlaicu din Orăştie.
64. **Dolga T. Octavian,** Lic. C. Diaconovici Loga Timişoara.
65. **Rozsay F. Lucia,** Lic . Carmen Sylva din Timişoara.
66. **Turcu V. Gheorghe,** Lic. Princip. Nicolae din Sighişoara.
67. **Gubitza E. Emil,** Lic. Moise Nicoară din Arad.
68. **Puşcaş A. Antoniu,** Lic. Sft. Vasile din Blaj.
69. **Marcu T. Iosif,** Lic. C. Diaconovici Loga Timişoara.
70. **Anastasiu Gh. Florin,** Lic. Dragoş Vodă, Câmpulung.
71. **Gheorghiu I. Vasile,** Lic. Aplic. Şc. Norm. Sup., Iaşi.
72. **Jarda St. Tudor,** Lic. Gheorghe Bariţiu din Cluj.
73. **Sandro Fl. Aurel,** Lic. Samuil Vulcan din Beiuş.
74. **Vintilă A. Pompiliu,** Lic. Traian Doda, Caransebeş.
75. **Andreescu Z. Emilian,** Lic. Sft. Petru şi Pavel din Ploeşti.
76. **Rocaş I. Liviu Traian,** Lic. A. Mureşan din Dej.
77. **Ignea I. Ioan Aurel,** Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
78. **Puia St. Emil,** Lic. Sft. Vasile din Blaj.
79. **Scraba T. Mircea Petru,** Lic. Aron Pumnul, Cernăuţi.
80. **Xenache X. Socrate C-tin,** Lic. Mihail Cogălniceanu, Vaslui.
81. **Berindei I. Ilie Gh.** Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
82. **Cratochwil G. Mircea,** Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti.
83. **Moldovan P. Nicolae,** Lic. Regele Ferdinand, Turda.
84. **Ţintoiu I. Alexe,** Lic. Industrial din Bucureşti.
85. **Oprişa N. Nicolae,** Lic. Sft. Vasile din Blaj.
86. **Tânjală Gh. Mihai,** Lic. Nicolae Bălcescu Brăila.
87. **Iosof V. Victor,** Lic. Gheorghe Lazăr din Sibiu.
88. **Şerban M. Alexandru,** Lic. Andrei Şaguna, Braşov.
89. **Grapini E. Eneas,** Lic. Alexandru Odobescu Bistriţa.
90. **Higea A. Ioan,** Lic. C. Diaconovici Loga, Timişoara.
91. **Opriş Al. Victor,** Lic. Vasile Lucaci din Carei.
92. **Rus L. Liviu,** Lic. Alexandru Odobescu Bistriţa.

Secretar: **V. BUCESCU.**

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Bakonyi C. (P., 1581, 1827, 1828, 1829, 1834, 1837, 1839, 1840, 1843, 1844, 1845, 1846, 1848, 1849, 1850, 1851, 1855, 1856, 1872); *Boerescu P. George* (P., N.); *Boleanţu Lazăr* (1757, 1765 [publicate], 1827, 1857); *Cetăţeanu Stelian* (1607, 1751, 1760, 1776, 1777, 1778, 1808, 1816, 1822, 1831, 1841, 1849, 1872, 1872, 1881); *Cocea Gh. Theodor* (P); *Costăchescu V. C.* (P.); *Cristea I. Nicolae* (1575, 1582, 1588, 1661, 1668, 1709, 1749, 1780, 1789, 1818, 1851, 1854, 1888); *Gloden Albert* (N. P., 1798, 1848, 1879, 1880); *Grumăzescu M.* (P); *Herlea V. Valeriu* (1801, 1734); *Luca I. I.* (1818, 1827, 1840, 1848, 1883, 1884, 1888); *Naneş Corneliu* (P.); *Negrea A. Mircea* (1851, 1855, 1853, 1856, 1861, 1863, 1871); *Petrescu R. Cheorghe* (1856, 1859); *Piţulescu Gheorghe* (P., 1833, 1850); *Săruleşteanu I. Emanoil* (P., 1012, 1405, 1413); *Simion I. Simu* (1799, 1845); *Theodorescu Dorin* (1639, 1660, 1664, 1691, 1693, 1700, 1703, 1710, 1735, 1746, 1751, 1763, 1774, 1787, 1799, 1810, 1815); *Văduva F. Marin* (1843, 1856, 1877); *Vostinariu Gheorghe* (1790, 1799, 1815, 1818, 1839, 1840, 1856, 1858, 1876); *Zamfirescu Z. I.* (P.)

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collaborations se publient en Allemand, Anglais, Espagnol Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié: 286 articles, 249 notes et 1892 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIII, s'a primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Prof. Ion Rizescu.* Str. Mihăileanu 18, Constanţa.
2. *Prof. Constantin Borş.* Str. Petru Rareş 85, Piatra Neamţ.
3. D-l *Marin I. Popa,* Licenţiat în Matematici. Bulevardul Alexandru I. Cuza 20, Bucureşti II.
4. *Dr. Michail St. Botez,* profesor, Str. I. G. Duca 15, Piatra Neamţ.
5. *Stelian Cetăţeanu,* Calea Serban-Vodă 108, Bucureşti.
6. *Petre Sergescu,* profesor Universitar, Str. Ghica-Vodă 12, Craiova.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

A apărut volumul:

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ

de

VALERIU ALACI

Profesor, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Lucrare premiată de „ACADEMIA ROMÂNĂ"

272 pagini — Preţul: 180 Lei.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XIX, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

ANUL XX DECEMVRIE 1940 No. 10.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **EUGEN VISA:** ASUPRA INSUMARII PROGRESIILOR ARITMETICO-GEOMETRICE.
2. **VIRGIL GLAUDIAN:** ASUPRA UNEI PROBLEME DE ANALIZA.
3. NOTE MATEMATICE: 22, 23, 24, 25.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 296, 1590, 1617, 1785 1787, 1794, 1807.
6. PROBLEME PROPUSE: 1898-1905.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XX, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIX inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XX — No. 10 TIMISOARA, DECEMVRIE 1940

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN
Şcoala Politechnică, Timişoara.

ASUPRA ÎNSUMĂRII PROGRESIILOR ARITMETICO-GEOMETRICE

DE

EUGEN VIŞA

Problema însumării *progresiilor aritmetico-geometrice,* care l-a preocupat în deosebi pe *Euler,* este susceptibilă de a primi o nouă soluţie, pe care îmi propun a o da în cuprinsul acestui articol.

Vreau să arăt anume că, suma unui număr dat de termeni ai unei *progresii aritmetico-geometrice* se poate exprima cu ajutorul sumelor particulare $\varphi_k(x)$ definite prin relaţia:

$$\varphi_k(x) = \sum_{i=0}^{n-k-1} C_{k+i}^{k}\, x^i$$

şi a căror expresie generală am stabilit-o în articolul *„Asupra unei însumări"* din R. M. T., Vol. XVII, pag. 109.

Voiu reaminti în prealabil două definiţiuni:

1°. Fiind dat un şir de numere:

(1) $$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_i, \ldots,$$

se zice despre termenii acestui şir că se află în *progresie aritmetică de ordinul m,* dacă avem satisfăcută relaţia:

(2) $$\Delta^m a_i = \text{const.} = \Delta^m a_0 \neq 0,$$

unde simbolul $\Delta^m a_i$ reprezintă diferenţa de ordinul m a termenului de rang i din şirul dat.

2°. Făcând produsele termenilor unei *progresii aritmetice* de un ordin oarecare prin termenii corespunzători ai unei progresii geometrice, obţinem un al treilea şir numeric, despre termenii căruia se zice că se află în *progresie aritmetico-geometrică* de acelaş ordin ca şi acela al *progresiei aritmetice* de bază.

O dată reamintite aceste definiţiuni, putem proceda la rezolvarea problemei ce ne-am propus.

Pentru aceasta plecăm dela relaţia cunoscută:

(3) $$a_\alpha = \sum_{k=0}^{m} C_\alpha^k\, \Delta^k a_0,$$ [1]

pe care o satisfac termenii şirului (1) considerat ca *progresie aritmetică* de ordinul m.

Fie atunci

(4) $$a_0,\ a_1 x,\ a_2 x^2, \ldots,\ a_i x^i, \ldots$$

o *progresie aritmetico-geometrică* ataşată progresiei aritmetice (1).

Suma primilor n termeni ai progresiei (4), pe care o notez cu $S(x)$, se va putea scrie condensat sub forma:

(5) $$S(x) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} a_\alpha x^\alpha\ .$$

Ţinând seama însă de relaţia (3), vom avea:

$$S(x) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m} C_\alpha^k\, \Delta^k a_0 \right) x^\alpha = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m} C_\alpha^k\, \Delta^k a_0\, x^\alpha \right)$$

şi intervertind ordinea însumărilor, urmează:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{\alpha=0}^{n-1} C_\alpha^k\, x^\alpha\, \Delta^k a_0 \right)$$

sau, ceeace e tot una:

(6) $$S(x) = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{\alpha=k}^{n-1} C_\alpha^k\, x^\alpha\, \Delta^k a_0 \right) =$$

[1]) Relaţia (3), ţinând seama de condiţia exprimată prin relaţia (2), se poate deduce cu uşurinţă din relaţia (16) din cuprinsul articolului *„Două teoreme relative la teoria diferenţelor"* publicat de subsemnatul în R. M. T., Vol. XVII, pag. 61. E. V.

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{\alpha=k}^{n-1} C_{\alpha}^{k}\, x^{\alpha}\right)\Delta^{k} a_{0}.$$

Făcând în (6) schimbarea:

$$\alpha - k = i$$

vom putea scrie:

$$S(x)=\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} C_{k+i}^{k}\, x^{k+i}\right)\Delta^{k} a_{0}$$

sau încă:

$$S(x)=\sum_{k=0}^{m} x^{k}\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} C_{k+i}^{k}\, x^{i}\right)\Delta^{k} a_{0}$$

şi având în vedere relaţia de definiţie a sumei $\varphi_k(x)$, în cele din urmă, deducem:

(7) $$\boxed{S(x)=\sum_{k=0}^{m} x^{k}.\,\varphi_{k}(x).\,\Delta^{k} a_{0}}\ .$$

Avem astfel în relaţia (7) tocmai formula ce vroiam să stabilesc relativ la însumarea *progresiilor aritmetico-geometrice* şi a cărei aplicare în practică nu comportă nici o greutate.

Notez totuşi că formula clasică pentru calculul sumei $S(x)$ definită prin relaţia (5) este următoarea:

(8) $$S(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{x^{k}}{(1-x)^{k+1}}\left(\Delta^{k} a_{0}-x^{n}\,\Delta^{k} a_{n}\right).$$

Pentru detalii în această privinţă se poate vedea de exemplu: *Leonhardi Euleri Opera omnia, Series I, Vol. X: Institutiones calculi differentialis* B. G. Teubner, Leipzig-Berlin 1913), pag. 217—220).

Ţin să menţionez însă că formula (7) prezintă faţă de formula (8) avantajul că ne permite să regăsim cu uşurinţă formula sumatorie relativă la *progresiile aritmetice* de ordin superior.

In adevăr, făcând în (7) $x = 1$, deducem:

$$S(1)=\sum_{k=0}^{m}\varphi_{k}(1)\,\Delta^{k} a_{0}$$

şi ţinând seama de relaţia:

(9) $$\varphi_{k}(1)=C_{n}^{k+1},$$

care se poate considera ca fiind cunoscută à priori, în cele din urmă obţinem:

(10) $$S(1)=\sum_{k=0}^{m} C_{n}^{k+1}\,\Delta^{k} a_{0},$$

adică chiar formula clasică pentru însumarea *progresiilor aritmetice* de ordinul m şi a cărei stabilire directă se poate face tocmai prin consideraţiuni analoage acelora cari ne-au condus la formula (7).

ASUPRA UNEI PROBLEME DE ANALIZĂ

DE VIRGIL CLAUDIAN

1. La examenul de capacitate pentru profesorii secundari, sesiunea din anul 1931, printre chestiunile date la proba scrisă din materia de licenţă, a fost şi următoarea:

Se dă ecuaţia diferenţială

$$x\,y'^{3} = y\,y' + 1$$

şi se cere:

a. *Să se integreze, exprimând pe x şi y in funcţie de y' ca parametru.*

b. *Să se arate că există o integrală particulară care rămâne finită pentru $y' = 1$, să se găsească această integrală şi să se construiască curba.*

Problema aceasta mai conţinea încă o întrebare, care fiind elementară, am lăsat-o la o parte.

Imi propun să mă ocup mai întâi de prima parte a problemei şi voi da două soluţiuni.

Soluţia I. Să punem $y' = p$ şi avem

(2) $$p^{3} x = p\,y + 1.$$

Sub forma aceasta se vede că ecuaţia este tip *Lagrange* şi se integrează prin diferenţiere.

In adevăr ecuaţia (2) se mai scrie:

$$y = p^{2} x - \frac{1}{p}.$$

De unde, dacă diferenţiem ambii membri, şi ţinem seamă de faptul că $dy = p\,dx$, căpătăm:

(3) $$dy = 2\,p\,x\,dp + p^{2}\,dx + \frac{dp}{p^{2}},$$

*** $$p\,dx = 2\,p\,x\,dp + p^{2}\,dx + \frac{dp}{p^{2}},$$

$$p^3(p-1)\,dx+(2p^3x+1)\,dp=0,$$

$$***\ (4)\qquad p^3(p-1)\frac{dx}{dp}+2p^3x+1=0.$$

Ecuaţia diferenţială (4) este însă, lineară.

Integrăm mai întâi ecuaţia fără termenul liber. Scriem (4) sub forma:

$$(5)\qquad \frac{dx}{dp}+\frac{2}{p-1}x+\frac{1}{p^3(p-1)}=0.$$

Integrăm ecuaţia:

$$(6)\qquad \frac{dx}{dp}+\frac{2}{p-1}x=0.$$

$$***\qquad \frac{dx}{x}=-\frac{2\,dp}{p-1},$$

$$***\qquad \log x=-2\log(p-1)+\log C,$$

$$***\ (7)\qquad x=C(p-1)^{-2}=\frac{C}{(p-1)^2}.$$

Pentru a determina integrala generală a ecuaţiei (5), plecăm dela (7) şi procedăm prin metoda variaţiei constantelor arbitrare. Din (7) avem

$$(8)\qquad \frac{dx}{dp}=(p-1)^{-2}\frac{dC}{dp}-2C(p-1)^{-3}.$$

Ţinând seamă de (7) şi (8), ecuaţia (5) devine:

$$\frac{1}{p-1}\frac{dC}{dp}+\frac{1}{p^3}=0,$$

$$***\qquad \frac{dC}{dp}=-\frac{p-1}{p^3}=\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^2}.$$

De unde prin integrare

$$(9)\qquad C=\frac{1}{p}-\frac{1}{2p^2}+C_1=\frac{2p-1}{2p^2}+C_1.$$

Prinurmare din (7) şi apoi din (3) căpătăm curba integrală generală, reprezentată sub formă parametrică:

$$(10)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{2p-1}{2p^2(p-1)^2}+\dfrac{C_1}{(p-1)^2} \\ y=\dfrac{3p-2}{2p(p-1)^2}+\dfrac{C_1p^2}{(p-1)^2}. \end{cases}$$

Soluţia II. Să considerăm transformarea lui *Legendre:*

$$(11)\qquad X=y',\qquad Y=xy'-y.$$

Prin diferenţiere deducem din (11)

$$(12)\qquad x=\frac{dY}{dX},\qquad y=X\frac{dY}{dX}-Y,\qquad y'=X.$$

Substituind formulele (12) în ecuaţia (1), avem:

$$X^3\frac{dY}{dX}=X\left(X\frac{dY}{dX}-Y\right)+1,$$

$$***\ (13)\qquad X^2(X-1)\frac{dY}{dX}+XY=1.$$

Ecuaţia diferenţială (13) este lineară. Integrăm ecuaţia fără membrul II:

$$(14)\qquad X(X-1)\,dY+Y\,dX=0,$$

$$***\qquad \frac{dY}{Y}+\frac{dX}{X(X-1)}=0,$$

$$***\qquad \log Y+\int\left(\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X}\right)dX=\log C_1,$$

$$***\ (15)\qquad Y=\frac{C_1X}{X-1}=C_1\left(1+\frac{1}{X-1}\right).$$

Determinăm integrala generală a ecuaţiei (13) prin metoda variaţiei constantelor. Din (15), avem

$$(16)\qquad \frac{dY}{dX}=\frac{X}{X-1}\frac{dC_1}{dX}-\frac{C_1}{(X-1)^2}.$$

Ţinând seamă de (15) şi (16), atunci (13) devine:

$$\frac{dC_1}{dX}=\frac{1}{X^3},$$

$$***\ (17)\qquad C_1=-\frac{1}{2X^2}+C.$$

In felul acesta găsim:

$$(18)\qquad Y=\frac{CX}{X-1}-\frac{1}{2X(X-1)},$$

$$(19)\qquad \frac{dY}{dX}=\frac{2X-1}{2X^2(X-1)^2}-\frac{C}{(X-1)^2}.$$

Dacă ne întoarcem la transformarea (12), căpătăm:

$$(20)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{2X-1}{2X^2(X-1)^2}-\dfrac{C}{(X-1)^2} \\ y=\dfrac{3X-2}{2X(X-1)^2}-\dfrac{CX^2}{(X-1)^2}. \end{cases}$$

Ori formulele (20) sunt identice cu formulele (10), în care $p=y'=X$ şi problema e rezolvată.

Observare. Ecuația (2) se putea scrie sub forma

$$x = \frac{y}{p^2} + \frac{1}{p^3},$$

$$d x = \frac{p^2 d y - 2 p y d p}{p^4} - \frac{3 d p}{p^4},$$

$$p^4 d x = p^2 d y - 2 p y d p - 3 d p,$$

$$p^4 \cdot \frac{d y}{p} = p^2 d y - 2 p y d p - 3 d p,$$

$$(21) \quad \frac{d y}{d p} + \frac{2}{p(p-1)} y + \frac{3}{p^2 (p-1)} = 0.$$

Ecuația (21) este lineară. Integrând, ajungem la valoarea lui y, dată de ecuațiile (10). In mod analog ajungem la x.

2. Expresiile lui x și y din (10) se mai pot scrie:

$$(22) \quad x = \frac{2 p^2 C_1 + 2 p - 1}{2 p^2 (p-1)^2}, \quad y = \frac{2 p^3 C_1 + 3 p - 2}{2 p (p-1)^2}.$$

Pentruca să existe o integrală particulară care să rămâe finită pentru $p = 1$, va trebui ca numărătorii expresiilor lui x și y, să se împartă cu $(p-1)^2$. Pentru ca să se întâmple acest lucru, se vede că valoarea comună a lui C_1 este $C_1 = -\frac{1}{2}$. Curba particulară este:

$$(23) \quad x = -\frac{1}{2p^2}, \quad y = -\frac{p+2}{2p}.$$

Eliminând parametrul p, ecuația curbei este

$$(24) \quad (2y+1)^2 + 8x = 0,$$

$$(25) \quad y = \tfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-8x}).$$

Curba (24) este o parabolă cu vârful $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, are axa paralelă cu Ox și mai trece prin punctul $\left(-\frac{1}{8}, 0\right)$. In cazul când luăm semnul plus înaintea radicalului din (25), se urmărește tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{8}$		0
y'	—	—	—	—	—
y	$+8$	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$

Curba se construește cu ușurință.

NOTE MATEMATICE

22. — *Problema 1753.* Afară de soluția publicată în numărul trecut, acestei probleme i s-a mai publicat o soluție la pag. 55, Vol. XIX al R. M. T. S-a arătat cu acel prileg că, problema 1753 este un caz particular al problemei care cere două numere inversate N și N′ între care există relația

$$N = p \times N'.$$

G-L Gh. Buicliu

23. — *Résolution en nombres entiers de quelques systèmes diophantiens.*

A. Proposons-nous de résoudre le système

$$v_1^2 + a v_1 w_1 + w_1^2 = v_2^2 + a v_2 w_2 + w_2^2 =$$
$$v_3^2 + a v_3 w_3 + w_3^2 = v_4^2 + a v_4 w_4 + w_4^2,$$

a étant un entier quelconque donné.

On a d'abord la relation

$$(r^2 + a r s + s^2)(t^2 + a t u + u^2) = v^2 + a v w + w^2,$$

dans laquelle v et w peuvent prendre les valeurs suivantes:

$$v_1 = r t - s u, \quad w_1 = s t + r u + a s u,$$
$$v_2 = r u - s t, \quad w_2 = s u + r t + a s t.$$

Si nous supposons que les nombres r et s sont tels qu'ils vérifient la relation

$$r^2 + a r s + s^2 = r'^2 + a r' s' + s'^2,$$

nous pouvons écrire

$$r = m p - n q, \quad s = n p + m q + a n q,$$
$$r' = m q - n p, \quad s' = n q + m p + a n p,$$

et, pour obtenir une solution du système proposé, nous n'avons qu'à adjoindre à v_1, w_1, v_2, w_2

$$v_3 = r' t - s' u, \quad w_3 = s' t + r' u + a s' u,$$
$$v_4 = r' u - s' t, \quad w_4 = s' u + r' t + a s' t.$$

Nous avons finalement la solution suivante, exprimée à l'aide de 6 paramètres arbitraires, m, n, p, q, t, u

$$\begin{cases} v_1 = (m p - n q) t - (n p + m q + a n q) u \\ v_2 = (m p - n q) u - (n p + m q + a n q) t \\ v_3 = (m q - n p) t - (n q + m p + a n p) u \\ v_4 = (m q - n p) u - (n q + m p + a n p) t \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 = (n\,p + m\,q + a\,n\,q)\,t + \\ \qquad (m\,p - n\,q + a\,n\,p + a\,m\,q + a^2\,n\,q)\,u \\ w_2 = (n\,p + m\,q + a\,n\,q)\,u + \\ \qquad (m\,p - n\,q + a\,n\,p + a\,m\,q + a^2\,n\,q)\,t, \\ w_3 = (n\,q + m\,p + a\,n\,p)\,t + \\ \qquad (m\,q - n\,p + a\,n\,q + a\,m\,p + a^2\,n\,p)\,u \\ w_4 = (n\,q + m\,p + a\,n\,p)\,u + \\ \qquad (m\,q - n\,p + a\,n\,q + a\,m\,p + a^2\,n\,p)\,t. \end{cases}$$

Exemple numérique.

$a=1,\ m=1,\ n=2,\ p=3,\ q=4,\ t=-1,\ u=2,$

$$31^2 - 8.31 + 8^2 = 23^2 + 8.23 + 8^2 =$$
$$32^2 - 32.13 + 13^2 = 13^2 + 13.19 + 19^2$$
$$(=777) \qquad = 3.7.37.$$

B. Pour résoudre le système

$$v_1^2 + a\,v_1\,w_1 + w_1^2 = v_2^2 + a\,v_2\,w_2 + w_2^2 = \cdots$$
$$\ldots = v_8^2 + a\,v_8\,w_8 + w_8^2,$$

nous supposerons en outre que les nombres t et u entrant dans les formules précédents vérifient la relation

$$t^2 + a\,t\,u + u^2 = t'^2 + a\,t'\,u'^2 + u'^2,$$

c'est-à-dire, que nons pouvons poser:

$$t = m'\,p' - n'\,q', \qquad u = n'\,p' + m'\,q' + a\,n'\,q'$$
$$t' = m'\,q' - n'\,p', \qquad u' = n'\,q' + m'\,p' + a\,n'\,p',$$

m', n', p', q', étant comme m, n, p, q, des entiers arbitrairement choisis.

Nous aurons alors à ajouter aux v_i, w_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$ dont l'expression à l'aide des r, s, t, u, r', s' ne change pas, les valeurs suivantes:

$$v_5 = r\,t' - s\,u', \qquad w_5 = s\,t' + r\,u' + a\,s\,u',$$
$$v_6 = r\,u' - s\,t', \qquad w_6 = s\,u' + r\,t' + a\,s\,t',$$
$$v_7 = r'\,t' - s'\,u', \qquad w_7 = s'\,t' + r'\,u' + a\,s'\,u',$$
$$v_8 = r'\,u' - s'\,t', \qquad w_8 = s'\,u' + r'\,t' + a\,s'\,t'.$$

On pourrait obtenir sans peine les expressions paramétriques des 16 inconnues à l'aide des 8 paramètres m, n, p, q, m'. n', p' et q'.

Exemple numérique.

$$a=1, \quad m=1, \quad n=2, \quad p=3, \quad q=4,$$
$$m'=1, \quad n'=2, \quad p'=3, \quad q'=5.$$

$$343^2 - 343.147 + 147^2 = 21^2 + 21.287 + 287^2 =$$
$$343^2 - 343.196 + 196^2 = 77^2 + 77.252 + 252^2 =$$
$$337^2 - 337.229 + 229^2 = 77^2 - 77.329 + 329^2 =$$
$$321^2 - 321.268 + 268^2 = 21^2 - 21.308 + 308^2$$
$$(= 88.837 = 7^4.37).$$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

---

24. — *Asupra triunghiurilor în care avem:*

$$(1) \qquad a = \frac{b^2 + b\,c + c^2}{b + c}.$$

Îmi propun să găsesc câteva relații între elementele unui triunghiu, bazându-mă pe relația de mai sus.

1. Să punem:

$$a = \frac{2\,S}{h_a}; \qquad b = \frac{2\,S}{h_b}; \qquad c = \frac{2\,S}{h_c},$$

vom avea:

$$\frac{2\,S}{h_a} = \frac{4\,S^2\left[\frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_b\,h_c} + \frac{1}{h_c^2}\right]}{2\,S\left[\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right]},$$

$$\frac{1}{h_a} = \frac{h_b^2 + h_b\,h_c + h_c^2}{h_b\,h_c\,(h_b + h_c)},$$

$$\frac{h_b\,h_c}{h_a} = \frac{h_b^2 + h_b\,h_c + h_c^2}{h_b + h_c}.$$

2. Ştim că:

$$2\,(p-a) = b + c - a; \qquad 2\,(p-b) = a + c - b;$$
$$2\,(p-c) = a + b - c.$$

Ţinând seama de (1), avem:

$$2\,(p-a) = b + c - \frac{b^2 + b\,c + c^2}{b + c} = \frac{b\,c}{b + c},$$

$$2\,(p-b) = \frac{b^2 + b\,c + c^2}{b + c} + c - b = \frac{b\,c + 2\,c^2}{b + c},$$

$$2\,(p-c) = \frac{b^2 + b\,c + c^2}{b + c} + b - c = \frac{2\,b^2 + b\,c}{b + c}.$$

Din relațiile din urmă scoatem:

$$p = \frac{b^2 + \frac{3}{2}\,b\,c + c^2}{b + c},$$

(2) $\frac{p-b}{p-a}=\frac{bc+2c^2}{bc}$; (3) $\frac{p-c}{p-a}=\frac{2b^2+bc}{bc}$.

Adunându-le şi punând

$$p-a=\frac{S}{r_a},\quad p-b=\frac{S}{r_b},\quad p-c=\frac{S}{r_c},$$

avem:

(4) $\frac{r_b+r_c}{r_b r_c}r_a=2\frac{h_b^2+h_b h_c+h_c^2}{h_b h_c}$,

$\frac{h_b h_c}{r_b r_c}(r_b+r_c)=2\frac{h_b^2+h_b h_c+h_c^2}{r_a}$.

Scăzând pe (3) din (2) avem, bazându-ne pe consideraţiile de mai în sus:

(6) $\frac{r_c-r_b}{r_b r_c}r_a=2\frac{h_b^2-h_c^2}{h_b h_c}$,

împărţind pe (4) prin (5), avem:

$$\frac{r_b+r_c}{r_b-r_c}=\frac{h_b^2+h_b h_c+h_c^2}{h_b^2-h_c^2},$$

în (2) avem:

$$\frac{\frac{S}{r_b}}{\frac{S}{r_a}}=\frac{\frac{2S}{h_b}+2\frac{2S}{h_c}}{\frac{2S}{h_b}};$$

(6) $$\frac{r_a}{r_b}=\frac{2h_b+h_c}{h_c},$$

deasemenea din (3), obţinem:

(7) $$\frac{r_a}{r_c}=\frac{2h_c+h_b}{h_b}.$$

Relaţia (6) se poate scrie şi

$$h_c(r_a-r_b)=2h_b r_b,$$

iar (7) se poate scrie şi

$$2h_c r_c=h_b(r_a-r_c),$$

de aci rezultă:

(8) $$(r_a-r_b)(r_a-r_c)=4r_b r_c.$$

3. Putem stabili şi relaţiuni unghiulare.

Punem în (1)

$$a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C$$

şi avem:

$$\sin A=\frac{\sin^2 B+\sin B\sin C+\sin^2 C}{\sin B+\sin C},$$

sau

$$\sin A(\sin B+\sin C)=\sin^2 B+\sin B\sin C+\sin^2 B.$$

Se ştie însă că,

$$\sin A\sin B+\sin A\sin C=\frac{2S\sin A}{a}\cdot\frac{b+c}{bc}$$

şi atunci avem:

$$\frac{b+c}{bc}=\frac{\sin^2 B+\sin B\sin C+\sin^2 C}{h_a\sin A},$$

ştiind că

$$\frac{bc}{b+c}=2(p-a),$$

relaţia se poate scrie şi:

$$r_a=\frac{\sin^2 B+\sin B\sin C+\sin^2 C}{a\sin A},$$

ştiind că

$$r_a=p\operatorname{tg}\frac{A}{2},\quad r_b=p\operatorname{tg}\frac{B}{2},\quad r_c=p\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

punând aceste valori în (8), avem:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=4\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Din aceasta şi din

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}},$$

scoatem:

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{B}{2}-\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

POPOVICI TH. IOAN

---

25. — *Asupra problemei 1738.*

In soluţia acestei probleme publicată în R. M. T., vol. XX, pag. 67, s'a strecurat o greşeală. După împărţirea ecuaţiei propuse prin $\sqrt[4]{x-2}$ se obţine:

(I) $\sqrt[4]{\frac{5x+1}{x-2}} - \sqrt[4]{(5x+1)^2(x-2)} + 2 = 0$

şi nu:

$$\sqrt[4]{\frac{5x+1}{x-2}} - \sqrt{\frac{5x+1}{x-2}} + 2 = 0.$$

Astfel, că acum punând în I

$$\sqrt[4]{\frac{5x+1}{x-2}} = y,$$

deci

$$x = \frac{1+2y^4}{y^4-5}$$

se obţine următoarea ecuaţie de gradul al 16-lea:

$$y^{16} + 8y^{15} + 24y^{14} + 32y^{13} + y^{12} - 120y^{11}$$
$$- 360y^{10} - 480y^9 - 1495y^8 + 600y^7 + 1800y^6$$
$$+ 2400y^5 + 1075y^4 - 1000y^3 - 3000y^2$$
$$- 4000y - 2000 = 0.$$

Printre rădăcinile acestei ecuaţii este şi $y = 2$, care dă pentru ecuaţia propusă soluţia $x = 3$.

IONEL I. STAMATE

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVI, No. 3, Noemvrie 1940. Regulamentul Bibliotecii *„George Ţiţeica"*. Algebra ornamentală, de *I. Ionescu*. Asupra problemei 2309, de *Tiberiu Popoviciu*. O problemă de geometrie a triunghiului, de *Gh. D. Simionescu*. Asupra unei teoreme a Dom. nului General *Gh. Buicliu*, de *Adrian Gheorghiu*. Raport asupra premiului *„V. Conta"*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Pozitiva*, revistă de matematici, Anul I, No. 3, Noemvrie 1940. Asupra unor funcţiuni armonice de două variabile, de *Caius Iacob*. O proprietate a conicelor şi construcţia razei lor de curbură, de *Ad. Gheorghiu*. Asupra triunghiurilor omologice, de *Gh. D. Simionescu*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

3. *Nicolae Abramescu*. Expunere de titluri, activitate didactică şi ştiinţifică.

4. *N. M.* Transformarea prin polare reciproce. (Biblioteca Revistei *„Pozitiva"*, Monografie No. 9). O recomandăm cetitorilor noştrii, care pot avea strînse la un loc multe chestiuni interesante relative la *„transformarea prin polare reciproce"*.

5. *Letterio Toscano*. Relazioni tra i polinomi di *Laguerre* e di *Hermite*.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 296. — *Pe laturile* AB *şi* AC *ale triunghiului* ABC *se iau de la* A *spre* B *şi* C *respectiv punctele* P_1 *şi* P_2 *şi de la* B *şi* C *spre* A *punctele* Q_1 *şi* Q_2 *astfel ca*

$$AP_1 = AP_2 = BQ_1 = CQ_2 = \frac{AB+AC}{2}.$$

Se cere să se demonstreze că:

1. Dreptele P_1P *şi* Q_1Q_2 *se întâlnesc în mijlocul* M *al laturei* BC *a triunghiului.*

2. Că dreptele P_1P_2 *şi* Q_1Q_2 *sunt perpendiculare.*

3. $P_1Q_1 = AC$ şi $P_2Q_2 = AB$.

4. Că dreptele P_1P_2 *şi* Q_1Q_2 *sunt dreptele lui Simson relativ la triunghiul* ABC *ale punctelor de pe diametrul ce trece prin* M.

A. COMAN

Soluţie. Pentru fixarea ideilor construim triunghiul ABC aşa fel în cât $AB < AC$. Rezultă că,

$$AB < AP_1 = AP_2 = \frac{AB+AC}{2} < AC,$$

deci P_1 este pe prelungirea lui AB, iar P_2 între A şi C.

1. Din definiţia şi construcţia punctelor P_1, P_2 se scoate

$$BP_1 = \frac{AB+AC}{2} - AB = \frac{AC-AB}{2},$$

$$AP_2 = AC - \frac{AB+AC}{2} = \frac{AC-AB}{2},$$

de unde rezultă

$$(1) \qquad BP_1 = CP_2 = \frac{AC-AB}{2}.$$

La fel se găseşte

$$(2) \qquad AQ_1 = AQ_2 = \frac{AC-AB}{2}.$$

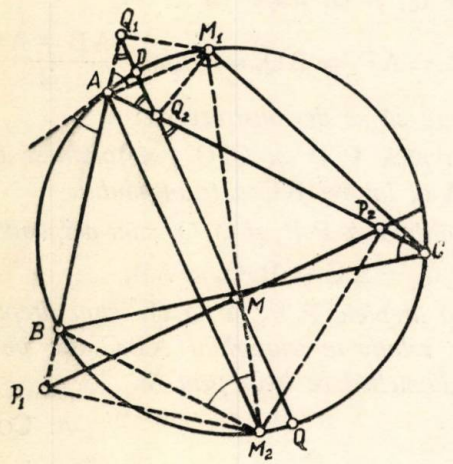
Fie acum M intersecţia lui BC cu P_1P_2. Aplicând teorema lui *Menelaus* triunghiului ABC tăiat de transversala P_1MP_2, găsim

$$\frac{P_1A}{P_1B} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{P_2C}{P_2A} = 1,$$

de unde, ținând seama de (1) și de enunț

$$\frac{MB}{MC} = 1,$$

care arată că M este mijlocul lui BC.



La fel se arată că Q_1Q_2 trece prin M.

2. Triunghiul Q_1AQ_2 fiind isoscel, avem

$$(3) \qquad \widehat{AQ_1Q_2} = \frac{A}{2} = \widehat{BAM_2},$$

M_2 fiind intersecția cercului ABC cu bisectoarea interioară a unghiului B. Egalitatea (3) arată că Q_1Q_2 este paralelă cu această bisectoare. La fel se arată că P_1P_2 este paralelă cu bisectoarea exterioară AM_1, deci $P_1P_2 \perp Q_1Q_2$ în mijlocul M al lui BC.

3. De pe figură și din (1) și (2) se scoate,

$$P_1Q_1 = BP_1 + BA + AQ_1 = AC,$$

$$P_2Q_2 = CA - (AQ_2 + CP_2) = AB.$$

4. Pe figură se vede că,

$$\sphericalangle BM_2M_1 = \sphericalangle M_1AQ_1,$$

ca având aceiași măsură. Cum P_1P_2 este paralelă cu AM_1 (de la proprietatea a doua), rezultă

$$\sphericalangle BP_1M = \sphericalangle BM_2M,$$

de unde patrulaterul P_1BMM_2 este inscriptibil. Cum M_2 este mijlocul arcului BC, iar M mijlocul coardei BC rezultă $MM_2 \perp BC$ și deci în patrulaterul inscriptibil P_1BMM_2 și unghiul BP_1M_2 va fi drept. Punctele P_1, M, P_2 fiind proiecțiile lui M_2 pe laturile triunghiului ABC, dreapta P_1MP_2 este dreapta lui *Simson* a punctului M_2 față de acest triunghiu.

S-au primit foarte bune soluții analoage de la d-nii: *Ardelea R, Beju C. T., Berdan C., Braieșter O, Ciorănescu I. C., Coșniță C, Crăiniceanu Gh., Gabrielescu C. V., Grigorescu L I, Ionescu I P, Ionescu-Bujor Th C, Katz P, Lepădatu I M., Manolescu I N, Mihăileanu N. N., Nestor G. D, Pamula Al., Pătroianu I. M., Petrescu P. Gh., Popovici Aurel, Popovici C. C., Popovici T. I, Popp I E, Radu M A, Răduleț B. R., Silion Gh I., Simionescu D Gh. Tărăbuță C. P., Țăraș V., Teodorescu M, D., Vasilescu B., Vasiliu C I* și *Vlăduțu Sabin.*

Această problemă a fost propusă în Vol. III, la 15 Noemvrie 1923. Așa se explică numele ce se întâlnesc printre rezolvitorii ei. Gh. B.

Problema 1590. — *Să se demonstreze că, dacă*

$$\begin{cases} x_1 = 2mpq^2 - n^2p(p^2+q^2) \\ y_1 = 2mnpq(p+q) \\ z_1 = 2mnpq(p-q), \end{cases}$$

m, n, p, q fiind arbitrari, atunci expresia

$$(x^2+y^2+z^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2),$$

este o sumă de trei patrate perfecte, oricare ar fi x, y, z.

A. GLODEN

Soluție. Se observă că:

$$y_1^2 + z_1^2 = 4m^2n^2p^2q^2(p+q)^2 + 4m^2n^2p^2q^2(p-q)^2$$
$$= 4m^2n^2p^2q^2[(p+q)^2+(p-q)^2] =$$
$$8m^2n^2p^2q^2(p^2+q^2).$$

Rezultă atunci că,

$$(1) \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4m^4p^2q^4 - 4m^2n^2p^2q^2(p^2+q^2)$$
$$+ n^4p^2(p^2+q^2)^2 + 8m^2n^3p^2q^2(p^2+q^2) =$$
$$4m^4p^2q^4 + 4m^2n^2p^2q^2(p^2+q^2) + n^4p^2(p^2+q^2)^2$$
$$= [2m^2pq^2 + n^2p(p^2+q^2)]^2.$$

Acum expresia din enunț, ținând seamă de (1), se poate scri,

$$(x^2+y^2+z^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2) =$$
$$\{px[2m^2q^2 + n^2(p^2+q^2)]\}^2 +$$
$$\{py[2m^2q^2 + n^2(p^2+q^2)]\}^2 +$$
$$\{pz[2m^2q^2 + n^2(p^2+q^2)]\},$$

care este o sumă de trei patrate perfecte, ori care ar fi x, y, z diferiți de zero.

Soluții date de d-nii: *Bârlea V. Suhățeanu* (Colegiul Militar. N. Filipescu), *Begu I Ștefan* (Șc. Polit., București), *Buznea D. Dinu* (Colegiul Milit., N. Filipescu), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Jidanu I. C.* (lic. Beiuș), *Matei D. D-tru* (Iași), *Modâlcă S. Emil* (lic. T.-Severin), *Murgu V. Marțian* (Șc. Polit., Timișoara), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popoviciu Gabriel, Rădulescu Gh. Octavian* (Colegiul Milit, N. Filipescu), *Reicher L. H.* (lic. Internat, Iași), *Segal Zigu* (lic. Vasliu) și *Tilică C. Ștefan* (lic. T-Severin).

Problema 1617. — *Se dă triunghiul dreptunghic* ABC *și se construește un alt triunghiu dreptunghic având catetele* $a-b+c$ *și* $a+b+c$.

Să se demonstreze că unghiurile ascuțite ale acestui din urmă triunghiu sunt,

$$45^0-\frac{B}{2} \quad \text{și} \quad 45^0+\frac{B}{2}.$$

Notațiile sunt cele obicinuite.

V. Alaci

Soluție. Dacă α și β sunt unghiurile triunghiului dreptunghic de catete, respectiv, $a-b+c$ și $a+b+c$, atunci conform unei teoreme cunoscute, avem

$$a-b+c=(a+b+c)\operatorname{tg}\alpha,$$

de unde,

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{a-b+c}{a+b+c}.$$

Cum din triunghiul dreptunghic inițial, avem

$$b=a\sin B, \qquad c=a\sin C=a\cos B$$

și cum sunt cunoscute relațiile

$$\sin B=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}, \quad 1+\cos B=2\cos^2\frac{B}{2},$$

relația (1) se poate scri succesiv:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a(1-\sin B+\cos B)}{a(1+\sin B+\cos B)}=$$

$$\frac{2\cos^2\frac{B}{2}-2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{2\cos^2\frac{B}{2}+2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}}=$$

$$\frac{1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{B}{2}\right).$$

Rezultă de aci,

$$\alpha=45^0-\frac{B}{2}$$

și atunci

$$\beta=45^0+\frac{B}{2},$$

fiindcă, $\alpha+\beta=90^0$.

Astfel am arătat că unghiurile ascuțite ale triunghiului dreptunghic de catete $a-b+c$, $a+b+c$ sunt respectiv

$$45^0-\frac{B}{2}, \qquad 45^0+\frac{B}{2}.$$

Soluții date de d-nii: *Andrievici N.* (Colegiul Militar, N. Filipescu), *Anițescu N. Nicolae, Bakonyi C.* (lic. Loga, Timișoara), *Berinde L. Titus* (Șc. Polit., Timișoara), *Buznea D. Dinu* (Colegiul Milit, N. Filipescu), *Cetățeanu Stelian* (Șc. Polit., București), *Dăscălescu Hristache* (Focșani), *Diaconescu D. Ion* (lic. T-Severin), *Diaconescu Marcel* (Colegiul Milit, N. Filipescu), *Jidanu I. C-tin* (lic. Beiuș), *Modâlca S. Emil* (lic. T-Severin), *Motaș Camil* (lic. Internat, Iași), *Murgu V. Marțian* (Șc. Polit., Timișoara), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popa D. Mircea* (lic. Milit., Iași), *Popescu-Zorica Alexandru* (București), *Reicher H.* (lic. Internat, Iași), *Roth I Alexandru* (lic. Arad), *Segal Zigu* (lic. Vaslui), *Stefănescu F. Marin* (Sub-Lt, Alba-Iulia), *Stoenescu D. Mirel* (Colegiul Milit., N. Filipescu) și *Tilică C. Ștefan* (lic. T-Severin).

Problema 1785. — *Să se arate că expresia,*

$$E=10^{5k+1}-10^{4k+1}-10^{3k+1}+10^{2k+1}+10^{3k}-10^{2k}-10^k+1,$$

este divizibilă prin 1089, oricare ar fi întregul pozitiv k.

I. I Stamate

Soluție. Se poate urmări cu ușurință că putem scri succesiv:

$$E=10^{2k+1}(10^{3k}-10^{2k}-10^k+1)+10^{3k}-10^{2k}-10^k+1$$

$$=(10^{3k}-10^{2k}-10^k+1)(10^{2k+1}+1)$$

$$=[10^{2k}(10^k-1)-(10^k-1)](10^{2k+1}+1)$$

$$=(10^k-1)(10^{2k}-1)(10^{2k+1}+1)$$

$$=[(9+1)^k-1][(11-1)^{2k}-1][(11-1)^{2k+1}+1]$$

$$=(\text{mult. } 9+1-1)(\text{mult. } 11+1-1)(\text{mult. } 11-1+1)$$

$$=\text{mult. } 9\,.\,\text{mult. } 11\,.\,\text{mult. } 11=\text{mult. } 9\times 11^2$$

$$=\text{mult. } 1089.$$

Astfel enunțul este justificat.

Observare. Fiind că factorii din E,

$$10^k - 1 = (9+1)^k - 1 = \text{mult. } 9 + 1 - 1 = \text{mult. } 9$$

$$10^{2k} - 1 = (9+1)^{2k} - 1 = \text{mult. } 9 + 1 - 1 = \text{mult. } 9,$$

urmează că,

$$E = \text{mult. } 9^2 \times 11^2 = \text{mult. } 9801.$$

Soluții date de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timișoara), *Boleanțu Lazăr* (lic. Loga, Timișoara), *Chintescu Matei* (Colegiul Milit., N. Filipescu), *Damianof Ștefan* (lic. Institutul-Român Sofia), *Dehelean I. Gheorghe* (lic. Beiuș), *Diaconescu Marcel* (Colegiul Milit., N. Filipescu), *Doscan Gh. Alexandru* (lic. Giurgiu), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Mahrenholtz Johannes* (Cottbus), *Mărgărit I. Nicolae* (București), *Mihoc N. Ovidiu* (bacalaureat), *Mocanu I. C-tin* (lic, Milit., Cernăuți), *Negrea Mircea* (Brăila), *Nicolae Gheorghe* (lic. Institutul-Român, Sofia), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Popovici Mircea* (Șc. Polit., Timișoara), *Schapira Salo* (lic Piatra-Neamț), *Șimon S Petru* (lic. Arad), *Tica P. Marin-Gal*, *Tilica C. Ștefan* (Șc. Of. de Geniu) și *Văduva F. Marin* (lic. Giurgiu).

Problema 1787. — *Presupunând $a \neq 0$ să se determine m prin condiția ca sistemul,*

$$\begin{cases} m x + (m-a) y + (m+a) z = m + 3a \\ (m-a) x + m y + (m-2a) z = m + 4a \\ (m+a) x + (m-2a) y + m z = m + 2a \\ (m+3a) x + (m+4a) y + (m+2a) z = m, \end{cases}$$

să fie compatibil și să se rezolve în acest caz.

CORNELIA NANES

Soluție. Pentru ca sistemul să fie compatibil, este necesar și suficient ca determinantul sistemului să fie nul, adică:

$$E = \begin{vmatrix} m & m-a & m+a & m+3a \\ m-a & m & m-2a & m+4a \\ m+a & m-2a & m & m+2a \\ m+3a & m+4a & m+2a & m \end{vmatrix} = 0,$$

Scăzând elementele coloanei a IV-a din acelea corespunzătoare ale coloanei a II-a și a III-a și apoi adaogând elementele coloanei a IV-a celor corespunzătoare din coloana I-a, obținem:

$$E = \begin{vmatrix} 2m+3a & -4a & -2a & m+3a \\ 2m+3a & -4a & -6a & m+4a \\ 2m+3a & -4a & -2a & m+2a \\ 2m+3a & 4a & 2a & m \end{vmatrix}$$

$$= 8a^2(2m+3a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & m+3a \\ 1 & 1 & 3 & m+4a \\ 1 & 1 & 1 & m+2a \\ 1 & -1 & -1 & m \end{vmatrix} = 0$$

și scăzând elementele liniei a III-a din acelea corespunzătoare liniei I-a, apoi adaogând elementele liniei a IV-a celor din linia III, mai putem scri succesiv:

$$E = 8a^2(2m+3a) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 3 & m+4a \\ 2 & 0 & 0 & 2m+2a \\ 1 & -1 & -1 & m \end{vmatrix}$$

$$= -8a^3(2m+3a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 16a^3(2m+3a) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 32a^3(2m+3a) = 0.$$

Cum prin ipoteză $a \neq 0$, pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca

Cum prin ipoteză $a \neq 0$, pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca

$$m = -\frac{3a}{2}.$$

Inlocuind această valoare a lui m în sistemul dat, simplificând, multiplicând apoi cu -2 fiecare ecuație și observând că ultima ecuație este identică cu prima, obținem următorul sistem:

$$\begin{cases} 3x + 5y + z = -3 \\ 5x + 3y + 7z = -5 \\ x + 7y + 3z = -1. \end{cases}$$

Rezolvind acest sistem prin regula lui *Cramer*, obținem

$$(1) \qquad x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

unde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 27+35+35-3-147-75 = -128,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 7 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 128, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 5 & -5 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 5 & 3 & -5 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

Inlocuind aceste valori în (1), găsim:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = z = 0, \end{cases}$$

soluțiile sistemului dat, în cazul $m = -\frac{3a}{2}$.

Au dat bune soluții d-ra *Papadopol-Demetra Elena* (lic. de fete, Bacău) și de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timișoara), *Diaconescu Marcel* (Colegiul Milit. N. Filipescu), *Modâlca S Emil* (T.-Severin), *Mureșan I. Octavian* (bacalaureat, Arad), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu) și *Teodorescu Dorin.*

Problema 1794. — *Să se găsească m în așa fel ca ecuațiile,*

$$\begin{cases} x^2 - 3mx - 2(m-1) = 0 \\ mx^2 - 4mx + 3 = 0, \end{cases}$$

să aibă o rădăcină comună

GH. TH. GHEORGHIU

Soluție. Este cunoscut că, condiția ca două ecuații de forma,

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

să aibă o rădăcină comună, este următoarea

(1) $(ac' - a'c)^2 - (bc' - b'c)(ab' - a'b) = 0.$

Referindu-ne la sistemul dat, condiția (1) devine

$$[3+2m(m-1)]^2 - [9m + 8m(m-1)](4m - 3m^2) = 0,$$

Dezvoltând calculele, obținem

(2) $28m^4 - 37m^3 + 12m^2 - 12m + 9 = 0.$

Primul membru al acestei ecuații se anulează pentru $m = 1$, deci el se divide prin $x - 1$ și ecuația devine:

(3) $(m-1)(28m^3 - 9m^2 + 3m - 9 = 0.$

Căutând pentru al 2-lea factor o rădăcină fracționară de forma $\frac{p}{q}$, unde p să fie divizor al lui 9, iar q divizor al lui 28, găsim ușor rădăcina $m = \frac{3}{4}$, astfel că ecuația (2), devine:

$$(m-1)(m - \frac{3}{4})(7m^2 + 3m + 3) = 0.$$

Rădăcinele acestei ecuații fiind

$$m_1 = 1, \quad m_2 = \frac{3}{4}, \quad m_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{-75}}{14},$$

care sunt valorile lui m ce răspund problemei.

Soluții date de d-na *Abramescu-Pop Mariana* și de d-nii: *Maior Gheorghe* (student), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu) *Tica P. Marin-Gall* și *Țarălungă Gh. Savel* (lic. Internat, Iași).

Problema 1807 — *Să se rezolve ecuația:*

$$\operatorname{arc\,cotg}\frac{a}{x} + \arccos(x-a) = \frac{3\pi}{4}.$$

Pentru ce valori a lui a avem rădăcini reale?

MARIN F. VADUVA

Soluție. Insemnând

$$A = \operatorname{arc\,cot}\frac{a}{x}, \qquad B = \arccos(x-a),$$

deducem,

(1) $$\operatorname{cotg} A = \frac{a}{x}, \qquad \cos B = x - a,$$

și ecuația dată se poate scri,

$$A + B = \frac{3\pi}{4}.$$

Luând cotangenta ambilor membrii, avem

$$\operatorname{cotg}(A+B) = \frac{\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B - 1}{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B} = -1,$$

de unde,

(2) $$\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B = 1.$$

Ținând seamă de valoarea lui cotg A din (1) și de faptul că tot în virtutea relației a 2-a din (1) putem scri

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\cos B}{\pm\sqrt{1 - \cos^2 B}} =$$

$$\frac{x-a}{\pm\sqrt{1-(x-a)^2}},$$

relația (2) devine,

$$\frac{a}{x}+\frac{x-a}{\pm\sqrt{1-(x-a)^2}}+\frac{a(x-a)}{\pm x\sqrt{1-(x-a)^2}}=1,$$

sau

$$\pm a\sqrt{1-(x-a)^2}+(x-a)(x+a)=\pm x\sqrt{1-(x-a)^2}.$$

Această ecuație se mai poate scri:

$$(x-a)(x+a)=\pm(x-a)\sqrt{1-(x-a)^2}.$$

De aci deducem

$$\begin{cases} x-a=0 \\ (x+a)^2=1-(x-a)^2, \end{cases}$$

de unde:

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1=a \\ x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}-a^2}. \end{cases}$$

Acum ținând seamă de enunț, vedem că, dacă a este real ecuația dată are totdeauna o rădăcină reală x_1, dacă mai mult avem,

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq a\leq\frac{1}{\sqrt{2}},$$

atunci și rădăcinele $x_{2,3}$ din (3) sunt reale.

Soluție dată de d-nul: *Maior Gheorghe* (student).

PROBLEME PROPUSE

1898. — Să se găsească patratele perfecte de șapte cifre de forma $abbaccc$.

G-l Gh. Buicliu

1899. — Să se găsească progresiile aritmetice ale căror termeni sunt numere întregi și au un număr impar de termeni, știind că primul termen este 6, iar triplul numărului termenilor întrece cu 3 suma termenilor egal depărtați de extremi.

Cornelia Nanes

1900. — Să se rezolve ecuația:

$$(\sqrt{x^2-2}+x)^{2n}=2^n i^n, \qquad (i=\sqrt{-1}).$$

V. Alaci

1901. — Să se rezolve sistemul diofantian

$$\begin{cases} x^2+(a+1)xy+ay^2=z^3 \\ x+y=t^3, \end{cases}$$

a fiind un întreg dat.

A. Gloden

1902. — Să se rezolve ecuația:

$$\sin x+\cos x+\sin x\cos x=-1.$$

Cpt. C Costachescu

1903. — Un avion ce sboară într'un plan orizontal este văzut la un moment dat de un observator A sub un unghiu α. După t secunde este văzut de observatorul din A sub un unghiu β și de un observator B sub un unghiu de 90°. Distanța dintre A și B este d. Să se afle viteza cu care sboară avionul.

Lt M. Grumazescu

1904. — Dacă x este un arc din primul cadran să se arate că avem:

$$\mathrm{Sp}\,x=\sqrt{(\mathrm{Sp}\,x-1)(2+sp\,x\,Sp\,x+cp\,x\,Cp\,x)},$$

notațiile fiind cele din „*Trigonometria patratică*".

Nicolae I. Cristea

1905. — Se dă triunghiul dreptunghic A B C. Prin vârful C se duce o secantă ce întâlnește cateta A B în C′.

Să se rezolve acest triunghiu, știind că această secantă este dusă astfel, încât avem satisfăcută relația:

$$\frac{AB}{\sqrt{2}\,AC'-C'B\,sp\frac{B}{2}}=\frac{\cos B}{sp\frac{B}{2}},$$

iar $2AC'=CC'=6$.

Mihail Botez

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Bakonyi C. (P., 1797); *Becu Crum* (1882, 1883); *Dobrescu Andrei* (P.); *Facsko I. Gheorghe* (1850, 1859, 1874, 1883, 1888); *Florescu E. Ghenade* (1883, 1887, 1888); *Gloden A.* (N., P., 1839, 1840, 1850); *Jidanu C-tin* (P.); *Lupescu Corneliu* (1827, 1829, 1834, 1836, 1837, 1856, 1859, 1863, 1866, 1874, 1876, 1883, 1884, 1887, 1888, 1891, 1892. 1895, 1896, 1897); *Mang Ileana* (1827, 1877, 1884, 1891, 1892); *Radoslav Gh. Ion* (1831, 1851, 1855, 1856, 1859, 1874, 1875, 1876, 1877, 1878, 1885, 1887); *Schapira Salo* (1690, 1827, 1895, 1896); *Stefanovici I. Mircea* (1887, 1895, 1896); *Ţarălungă Sorel* (1754, 1810, 1815, 1829, 1834, 1839, 1844. 1848, 1874, 1875, 1876, 1877, 1879, 1880, 1886, 1888); *Voronca Horia* (1891, 1895, 1896).

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 286 articles, 249 notes et 1892 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIII, s'a primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Prof. Ion Rizescu.* Str. Mihăileanu 18, Constanţa.
2. *Prof. Constantin Borş.* Str. Petru Rareş 85, Piatra Neamţ.
3. D-l *Marin I. Popa,* Licenţiat în Matematici. Bulevardul Alexandru I. Cuza 20, Bucureşti II.
4. *Dr. Michail St. Botez,* profesor, Str. I. G. Duca 15, Piatra Neamţ.
5. *Stelian Cetăţeanu,* Calea Serban-Vodă 108, Bucureşti.
6. *Petre Sergescu,* profesor Universitar, Str. Ghica-Vodă 12, Craiova.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

A apărut volumul:

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ

de

VALERIU ALACI

Profesor, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Lucrare premiată de „ACADEMIA ROMÂNĂ"

272 pagini — Preţul: 180 Lei.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XIX, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

ANUL XX. IANUARIE 1940 No 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI:** UN NOU CAPITOL DE „GEOMETRIE „ANALITICA".
3. NOTE MATEMATICE: 26, 27, 28.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 315, 1731.
6. PROBLEME PROPUSE: 1906-1913.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institutul de Arte grafice „Tipografia Romînească"

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Avem plăcerea a anunţa că, începând de la 15 Ianuarie c., mai face parte dintre membrii „R. M. T." şi D-l Profesor *Ştefan Muşta,* Inspector General secundar, un vechi şi distins colaborator, Str. Pavel 4, Beiuş.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XX, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIX inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XX — No. 11 TIMISOARA, IANUARIE 1941

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

UN NOU CAPITOL DE „GEOMETRIE ANALITICĂ".

SISTEME PARAMETRICE CARE REPREZINTĂ PATRULATERE RECTILINII ȘI INVERS.

DE PROF. V. ALACI.

Cunoștințele de *trigonometrie patratică* pe care le-am expus într'un volum [1], permit a arăta că, un anumit *sistem parametric* reprezintă un patrulater rectiliniu și că, se poate soluționa și problema inversă. Discuția ce o vom face, va mai pune în evidență că, *sistemul parametric* considerat poate reprezenta și alte configurații liniare.

In prealabil însă, vom soluționa și discuta o anumită ecuație de *trigonometrie patratică,* pentru a simplifica expunerea *reprezentării parametrice* a unui patrulater rectiliniu și a chestiunilor conexe.

I.

Problemă. *Să se rezolve și să se discute ecuația trigonometrică patratică,*

$$a\,sp\,x + b\,cp\,x + c = 0, \tag{1}$$

unde a, b, c sunt constante date.

Soluție. Impărțind ecuația cu a, obținem

$$sp\,x + \alpha\,cp\,x + \beta = 0, \tag{2}$$

unde am notat,

$$\alpha = \frac{b}{a}, \qquad \beta = \frac{c}{a}. \tag{3}$$

Funcțiunile patratice $sp\,x$, $cp\,x$ fiind periodice de perioadă 2π, vom căuta întâi numai arcele din intervalul $(0, 2\pi)$ care satisfac ecuația (2), la care vom adăoga $2k\pi\ (k = 0, 1, 2, \ldots)$ pentru a avea soluții generale.

[1]) *V. Alaci. Trigonometria patratică.*

Știm însă că, între funcțiunile patratice $sp\,x$, $cp\,x$ există relația fundamentală,

$$|sp\,x| + |cp\,x| = 1,$$

care explicitată devine:

(I) $sp\,x + cp\,x = 1$, pentru $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,

(II) $sp\,x - cp\,x = 1$, „ $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$,

(III) $sp\,x + cp\,x = -1$, „ $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$,

(IV) $sp\,x - cp\,x = -1$, „ $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$.

Ținând seamă de aceste formule fundamentale, vom cerceta pe rând dacă ecuația (2) are rădăcini în diferitele cadrane și în ce condiții, ceeace ne impune a studia succesiv următoarele cazuri:

1°. *Cazul când* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Pentru a găsi o soluție în primul cadran a ecuației (2), scoatem valoarea lui $cp\,x$ din (I) și o înlocuim în (2), obținem,

$$sp\,x + \alpha\,(1 - sp\,x) + \beta = 0,$$

de unde,

$$sp\,x = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - 1}. \tag{4}$$

Pentru a exista un arc $0 \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}$, care să satisfacă ecuația (4), trebuie ca,

$$0 \leq \frac{\alpha + \beta}{\alpha - 1} \leq 1,$$

echivalentă cu inegalitățile,

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 0 \\ \alpha - 1 > 0 \\ \alpha + \beta \leq \alpha - 1, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \alpha + \beta \leq 0 \\ \alpha - 1 < 0 \\ \alpha + \beta \geq \alpha - 1. \end{cases}$$

Aceste sisteme de inegalități sunt satisfăcute simultan, respectiv, dacă

$\boxed{1 \leq -\beta \leq \alpha}$, sau $\boxed{\alpha \leq -\beta \leq 1}$.

Prin urmare, dacă una din aceste inegalităţi este satisfăcută, ecuaţia (2), deci şi cea dată, admite o soluţie în primul cadran, soluţia generală în acest caz fiind,

$$(2') \quad \boxed{x = 2k\pi + \operatorname{Arc\,sp}\frac{\alpha+\beta}{\alpha-1}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Cazuri limită. Dacă,

$$\alpha = -\beta = 1,$$

ecuaţia (2) reducându-se la identitatea (I), admite o infinitate de soluţii, orice valoare a lui x din intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$, fiind soluţie.

Dacă,

$$\alpha \neq 1, \quad \beta = -\alpha,$$

ecuaţia (2) admite soluţia generală

$$x = 2k\pi, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dacă,

$$\alpha \neq 1, \quad \beta = -1,$$

ecuaţia (2) admite soluţia generală

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

2°. *Cazul când* $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$. Pentru a găsi o soluţie a ecuaţiei (2) în cadranul al 2-lea, scoatem valoarea lui $cp\,x$ din (II) şi o înlocuim în (2), obţinem

$$sp\,x + \alpha(sp\,x - 1) + \beta = 0,$$

de unde

$$(5) \quad sp\,x = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+1}.$$

Pentru a exista un arc $\frac{\pi}{2} \leq x_2 \leq \pi$, care să satisfacă ecuaţia (5), trebue ca,

$$0 \leq \frac{\alpha-\beta}{\alpha+1} \leq 1,$$

echivalentă cu inegalităţile,

$$\begin{cases} \alpha - \beta \geq 0 \\ \alpha + 1 > 0 \\ \alpha - \beta \leq \alpha + 1, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \alpha - \beta \leq 0 \\ \alpha + 1 \leq 0 \\ \alpha - \beta \geq \alpha + 1. \end{cases}$$

Aceste sisteme de inegalităţi sunt satisfăcute simultan, respectiv, dacă

$\boxed{-1 \leq \beta \leq \alpha}$, sau $\boxed{\alpha \leq \beta \leq -1}$.

Prin urmare, dacă una din aceste inegalităţi este satisfăcută, ecuaţia (2), deci şi cea dată, admite o soluţie în cadranul al 2-lea, soluţia generală fiind:

$$(2'') \quad \boxed{x = 2k\pi + \operatorname{Arc\,sp}\frac{\alpha-\beta}{\alpha+1}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Cazuri limită. Dacă,

$$\alpha = \beta = -1,$$

ecuaţia (2) reducându-se la identitatea (II), admite o infinitate de soluţii, orice valoare a lui x din intervalul închis $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ fiind soluţie.

Dacă,

$$\alpha \neq -1, \quad \beta = -1,$$

ecuaţia (2) admite soluţia generală

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dacă,

$$\alpha \neq -1, \quad \beta = \alpha,$$

ecuaţia (2) admite soluţia generală

$$x = (2k+1)\pi, \quad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

3°. *Cazul când* $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. Pentru a găsi o soluţie a ecuaţiei (2) în cadranul al 3-lea, scoatem valoarea lui $cp\,x$ din (III) şi o înlocuim în (2), obţinem,

$$sp\,x - \alpha(1 + sp\,x) + \beta = 0,$$

de unde

$$(6) \quad sp\,x = \frac{\beta-\alpha}{\alpha-1}.$$

Pentru a exista un arc $\pi \leq x_3 \leq \frac{3\pi}{2}$, care să satisfacă ecuaţia (6), trebuie ca,

$$-1 \leq \frac{\beta-\alpha}{\alpha-1} \leq 0, \quad \text{sau} \quad 0 \leq \frac{\alpha-\beta}{\alpha-1} \leq 1,$$

echivalentă cu inegalităţile

$$\begin{cases} \alpha - \beta \geq 0 \\ \alpha - 1 > 0 \\ \alpha - \beta \leq \alpha - 1, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \alpha - \beta \leq 0 \\ \alpha - 1 < 0 \\ \alpha - \beta \geq \alpha - 1. \end{cases}$$

Aceste inegalităţi sunt satisfăcute simultan, respectiv, dacă

$\boxed{1 \leq \beta \leq \alpha}$, sau $\boxed{\alpha \leq \beta \leq 1}$.

Prin urmare, dacă una din aceste inegalităţi este

satisfăcută, ecuaţia (2), deci şi cea dată, admite o soluţie în cadranul al 3-lea, soluţia generală fiind,

$$(2''') \quad \boxed{x = 2k\pi + \operatorname{Arc}\, sp \frac{\beta - \alpha}{\alpha - 1}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Cazuri limită. Dacă,

$$\alpha = \beta = 1,$$

ecuaţia (2) reducându-se la identitatea (III'), admite o infinitate de soluţii, orice valoare a lui x din intervalul închis $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, fiind soluţie.

Dacă,

$$\alpha \neq 1, \qquad \beta = \alpha,$$

ecuaţia (2) admite soluţia generală

$$x = 2k + 1)\pi, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dacă,

$$\alpha \neq 1, \qquad \beta = 1,$$

ecuaţia (2) admite soluţia generală

$$x = 2k + 1)\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

4°. *Cazul când* $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$. Pentru a găsi o soluţie a ecuaţiei (2), în cadranul al 4-lea, scoatem valoarea lui $cp\, x$ din (IV) şi o înlocuim în (2), obţinem,

$$sp\, x + \alpha(1 + sp\, x) + \beta = 0,$$

de unde

$$(7) \qquad sp\, x = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha + 1}.$$

Pentru a exista un arc $\frac{3\pi}{2} \leq x_4 \leq 2\pi$, care să satisfacă ecuaţia (7), trebue ca,

$$-1 \leq -\frac{\alpha + \beta}{\alpha + 1} \leq 0, \quad \text{sau} \quad 0 \leq \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 1} \leq 1,$$

echivalentă cu inegalităţile

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 0 \\ \alpha + 1 > 0 \\ \alpha + \beta \leq \alpha + 1, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \alpha + \beta \leq 0 \\ \alpha + 1 < 0 \\ \alpha + \beta \geq \alpha + 1. \end{cases}$$

Aceste sisteme de inegalităţi sunt satisfăcute simultan, respectiv, dacă

$$\boxed{-1 \leq -\beta \leq \alpha}, \quad \text{sau} \quad \boxed{\alpha \leq -\beta \leq -1}.$$

Prin urmare, dacă una din aceste inegalităţi este satisfăcută, ecuaţia (2), deci şi cea dată, admite o soluţie în cadranul al 4-lea, soluţia generală fiind

$$(2^{IV}) \quad \boxed{x = 2k\pi + \operatorname{Arc}\, sp\, (-\frac{\alpha + \beta}{\alpha + 1})}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Cazuri limită. Dacă,

$$\alpha = -\beta = -1,$$

ecuaţia (2) reducându-se la identitatea (IV), admite o infinitate de soluţii, orice valoare a lui x din intervalul închis $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, fiind soluţie.

Dacă,

$$\alpha \neq -1, \qquad \beta = 1,$$

ecuaţia (2) admite soluţia generală

$$x = (2k + 1)\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dacă,

$$\alpha \neq -1, \qquad \beta = -\alpha,$$

ecuaţia (2) admite soluţia generală

$$x = 2k\pi, \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Rezultatele ce le-am obţinut până aci în studiul ecuaţiei (2), la care se reduce orice ecuaţie de forma (1), le putem rezuma în următorul tablou:

(T)

Soluţii ale ecuaţiei: $sp\, x + \alpha\, cp\, x + \beta = 0$				
Avem:	$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$	$\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$
Dacă	$\boxed{1 \leq -\beta \leq \alpha}$ sau $\boxed{\alpha \leq -\beta \leq 1}$	$\boxed{-1 \leq \beta \leq \alpha}$ sau $\boxed{\alpha \leq \beta \leq -1}$	$\boxed{1 \leq \beta \leq \alpha}$ sau $\boxed{\alpha \leq \beta \leq 1}$	$\boxed{-1 \leq -\beta \leq \alpha}$ sau $\boxed{\alpha \leq -\beta \leq -1}$
In care caz x se obţine din relaţia:	$sp\, x = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - 1}$	$sp\, x = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + 1}$	$sp\, x = \frac{\beta - \alpha}{\alpha - 1}$	$sp\, x = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha + 1}$

Din acest tablou vedem că, pentru ca ecuația (2) să aibă o soluție în cel puțin unul din cadrane, trebuie ca β sau $-\beta$ să fie cuprins în unul din intervalele

(8) $(1, \alpha)$, $(\alpha, 1)$, $(-1, \alpha)$, $(\alpha, -1)$,

numerele 1, α și -1, α fiind asezate în ordine de mărime.

Se constată însă că, dacă β este cuprins în unul din intervalele (8), atunci β sau $-\beta$ este cuprins și într'un al doilea interval din (8), că prin urmare, *dacă ecuația (2) admite o soluție într'un cadran, admite simultan o soluție și într'un alt cadran.*

In adevăr dacă avem

$$1 < \beta < \alpha,$$

avem simultan și $-1 < \beta < \alpha$, deci conform tabloului, ecuația (2) admite o soluție în cadranul al 3-lea și alta în cadranul al 2-lea.

Dacă avem însă,

$$-1 < \beta < \alpha,$$

vom avea $1 < \beta < \alpha$, sau $-1 < -\beta < \alpha$, deci ecuația (2) admite o soluție în cadranul al 2-lea și o alta în cadranul al 3-lea sau al 4-lea. Tot astfel putem invedera că totdeauna, două din condițiile tabloului pot fi satisfăcute simultan, exceptând cazurile limită.

Dacă β este în afara intervalelor (8), atunci ecuația (2) n'are nici o soluție.

Din contra, dacă avem satisfăcute unele din cazurile limită, ecuația (2) are o infinitate de soluții, așa cum am precizat.

Importanța tabloului (T) *constă în aceea că, atunci când ni se cere să rezolvim o ecuație de forma*

$$a\,sp\,x + b\,cp\,x + c = 0,$$

după ce o aducem la forma

(2) $$sp\,x + \alpha\,cp\,x + \beta = 0,$$

nu-i nevoie să cercetăm pe rând dacă are sau nu are soluții în diferitele cadrane, urmând metoda expusă. O simplă cercetare a tabloului (T) *ne indică, dacă ecuația dată are sau nu are soluții și în cazul afirmativ, tabloul* (T) *fixează în ce cadrane sunt ele.*

Ceva mai mult, după ce am fixat cadranele în care există soluție pentru ecuația (2), găsim tot în tabloul (T) în dreptul acestor cadrane și în ultimul rând, ecuațiile simple de forma

(9) $$sp\,x = k_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

echivalente cu ecuația (2), pentru cadranele corespunzătoare.

Ecuațiile (9) se rezolvă în urmă, fie cu ajutorul tabelelor ce conțin valorile naturale ale sinusurilor patratice, fie cu ajutorul tabelelor de logaritmi ale sinusurilor patratice, ambele feluri de tabele găsindu-se în volumul „Trigonometria patratică".

Altă metodă pentru stabilirea condițiilor din tabloul (T).

Fie ecuația

(10) $$sp\,x + \alpha\,cp\,x + \beta = 0$$

și x_1 o rădăcină a ei situată în unul din cadrane.

Avem evident,

(11) $$sp\,x_1 + \alpha\,cp\,x_1 + \beta \equiv 0.$$

1°. Dacă arcul x_1 este în primul cadran, el satisface formula fundamentală (I), adică avem:

(12) $$sp\,x_1 + cp\,x_1 - 1 = 0.$$

Scăzând relația (12) din (11), deducem

$$\beta = -1 + (1 - \alpha)\,cp\,x_1.$$

Pentru $x_1 = 0$ și $x_1 = \frac{\pi}{2}$ găsim extremele lui β, când x_1 variază în intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$ și astfel rezultă că,

$$-\alpha \leq \beta \leq -1, \quad \text{sau} \quad -1 \leq \beta \leq -\alpha.$$

Inmulțind cu -1 aceste inegalități, avem respectiv,

$$\boxed{1 \leq -\beta \leq \alpha}, \quad \text{sau} \quad \boxed{\alpha \leq -\beta \leq 1},$$

care sunt tocmai condițiile din tabloul (T), corespunzătoare primului cadran.

2°. Dacă arcul x_1 este în cadranul al 2-lea, el satisface formula fundamentală (II), adică avem:

(13) $$sp\,x_1 - cp\,x_1 - 1 = 0.$$

Scăzând relația (13) din (11), deducem:

$$\beta = -1 - (\alpha + 1)\,cp\,x_1.$$

Pentru $x_1 = \frac{\pi}{2}$ și $x_1 = \pi$ găsim extremele lui β, când x_1 variază în intervalul închis $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ și astfel rezultă că,

$$\boxed{|-1 \leq \beta \leq \alpha|} \quad \text{sau} \quad \boxed{|\alpha \leq \beta \leq -1|},$$

care sunt tocmai condițiile din tabloul (T), corespunzătoare cadranului al 2-lea.

3°. Dacă arcul x_1 este în cadranul al 3-lea, el satisface formula fundamentală (III), adică avem:

$$sp\, x_1 + cp\, x_1 + 1 = 0. \tag{14}$$

Scăzând relația (14) din (11), deducem:

$$\beta = 1 - (\alpha - 1)\, cp\, x_1.$$

Pentru $x_1 = \pi$ și $x_1 = \frac{3\pi}{2}$ găsim extremele lui β, când x_1 variază în intervalul închis $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ și astfel rezultă că,

$$\boxed{|\alpha \leq \beta \leq 1|}, \quad \text{sau} \quad \boxed{|1 \leq \beta \leq \alpha|},$$

care sunt tocmai condițiile din tabloul (T), corespunzătoare cadranului al 3-lea.

4°. Dacă arcul x_1 este în cadranul al 4-lea, el satisface formula fundamentală (IV), adică avem:

$$sp\, x_1 - cp\, x_1 + 1 = 0. \tag{15}$$

Scăzând relația (15) din (11), deducem:

$$\beta = 1 - (\alpha + 1)\, cp\, x_1.$$

Pentru $x_1 = \frac{3\pi}{2}$ și $x_1 = 2\pi$ găsim extremele lui β, când x_1 variază în intervalul închis $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ și astfel rezultă că,

$$1 \leq \beta \leq -\alpha, \qquad \text{sau} \qquad -\alpha \leq \beta \leq 1.$$

Inmulțind cu -1 aceste inegalități, avem respectiv

$$\boxed{|\alpha \leq -\beta \leq -1|}, \quad \text{sau} \quad \boxed{|-1 \leq -\beta \leq \alpha|},$$

care sunt tocmai condițiile din tabloul (T), corespunzătoare cadranului al 4-lea.

Observare. Am fi putut încă rezolva și discuta ecuația (1) printr'o metodă indirectă, transformând'o într'o *ecuație trigonometrică*, cu ajutorul formulelor cunoscute din *„Trigonometria patratică"*, anume,

$$|sp\, x| = \frac{|\operatorname{tg} x|}{1 + |\operatorname{tg} x|} = \frac{|\sin x|}{|\sin x| + |\cos x|},$$

$$|cp\, x| = \frac{1}{1 + |\operatorname{tg} x|} = \frac{|\cos x|}{|\sin x| + |\cos x|},$$

formule care explicitate se modifică pentru diferitele cadrane.

Aplicații. 1°. *Să se rezolve ecuația:*

$$sp\, x + 5\, cp\, x + 2 = 0. \tag{16}$$

Soluție. Această ecuație admite rădăcini, căci comparată cu (2) ne dă

$$\alpha = 5, \qquad \beta = 2$$

și se observă că $\beta = 2$ este cuprins simultan în intervalele $(-1, \alpha = 5)$ și $(1, \alpha = 5)$, ceea ce înseamnă conform tabloului (T) că, ecuația (16) admite simultan o rădăcină în cadranul al 2-lea și alta în cadranul al 3-lea.

Rădăcina din cadranul al 2-lea a ecuației (16), conform tabloului (T) este dată de relația

$$sp\, x = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + 1} = \frac{1}{2},$$

de unde urmează că soluția generală a ecuației (16), în acest caz, este

$$\boxed{|x = 2k\pi + 135^0|}. \tag{16'}$$

Rădăcina din cadranul al 3-lea a ecuației (16), tot conform tabloului (T) este dată de relația,

$$sp\, x = \frac{\beta - \alpha}{\alpha - 1} = -\frac{3}{4} = -0{,}75000,$$

care este echivalentă cu

$$sp\,(x - \pi) = 0{,}75000.$$

Luând logaritmii zecimali în ambii membrii, avem

$$\log sp\,(x - \pi) = \bar{1}{,}87506. \tag{17}$$

Căutând în tabelele de logaritmi ale *sinusului patratic*, găsim:

La,	$\bar{1}{,}87497$,	corespunde	$71^0, 33'$
„	$\bar{1}{,}87506$,	„	$71^0, 33', s''$
„	$\bar{1}{,}87508$,	„	$71^0, 34'$.

De aci deducem,

$$s'' = \left(\frac{60 \times 9}{11}\right)'' \simeq 49''.$$

Rezultă atunci din (17),

$$x - \pi = 71^0, 33', 49'',$$

iar soluția generală a ecuației (16), în acest caz, este:

$$\boxed{|x = (2k+1)\pi + 71^0, 33', 49''|}, \tag{16''}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ecuaţia (16) admite astfel soluţiile generale (16′) şi (16″).

2°. *Să se determine m astfel ca ecuaţia*

(18) $$sp\,x + 3\,cp\,x + m^2 - 5m + 7 = 0,$$

să admită o rădăcină în cadranul al 2-lea şi o altă rădăcină în cadranul al 3-lea.

Soluţie. Comparând ecuaţia (18) cu (2), avem

$$\alpha = 3, \qquad \beta = m^2 - 5m + 7.$$

Pentru ca ecuaţia (18) să admită rădăcini în cadranele al 2-'ea şi al 3-lea, conform tabloului (T) şi observând că $\alpha = 3$, trebuie să avem satisfăcute simultan inegalităţile

(19) $$-1 \leq \beta = m^2 - 5m + 7 \leq 3,$$

(20) $$1 \leq \beta = m^2 - 5m + 7 \leq 3.$$

Observăm însă că, dacă inegalităţile (20) sunt satisfăcute, inegalităţile (19) sunt satisfăcute simultan.

Rămâne dar să determinăm pe m astfel ca,

$$1 \leq m^2 - 5m + 7 \leq 3,$$

sau ceea ce este echivalent a determina pe m ca să avem simultan

(21) $$\begin{cases} m^2 - 5m + 6 \geq 0 \\ m^2 - 5m + 4 \leq 0. \end{cases}$$

Cum rădăcinele ecuaţiilor

$$m^2 - 5m + 6 = 0, \qquad m^2 - 5m + 4 = 0$$

sunt respectiv 2, 3 şi 1, 4 rezultă că, prima inegalitate din (21) este satisfăcută pentru $m \leq 2$ sau $m \geq 3$, iar a doua inegalitate din (21) este satisfăcută pentru $1 \leq m \leq 4$.

Urmează că sistemul de inegalităţi (21) este satisfăcut simultan pentru,

(22) $\boxed{1 \leq m \leq 2}$, sau (23) $\boxed{3 \leq m \leq 4}$.

Prin urmare dacă m satisface condiţiile de inegalitate (22), sau (23), ecuaţia dată (18) admite o rădăcină în al 2-lea cadran şi o altă rădăcină în al 3-lea cadran.

Inainte de a trece la a 2-a parte a acestui articol, vom demonstra încă următoarea teoremă pe care o vom folosi în expunerea ce va urma.

Teoremă. *Dacă o ecuaţie de forma*

(24) $$sp\,x + \alpha\,cp\,x + \beta = 0,$$

are două rădăcini diferite x_1 şi x_2 într'un acelaşi cadran, ea admite o infinitate de rădăcini în acel cadran.

Demonstraţie. Inlocuind în (24) pe x prin x_1 şi x_2, rădăcini, avem identic,

(25) $$\begin{cases} sp\,x_1 + \alpha\,cp\,x_1 + \beta \equiv 0 \\ sp\,x_2 + \alpha\,cp\,x_2 + \beta \equiv 0. \end{cases}$$

Scăzând aceste relaţii şi în urmă aflând pe α, obţinem

(26) $$\alpha = \frac{sp\,x_1 - sp\,x_2}{cp\,x_2 - cp\,x_1}.$$

1°. Dacă x_1 şi x_2 sunt arce în primul cadran, ele satisfac formula fundamentală (I), de unde deducem

$$cp\,x_1 = 1 - sp\,x_1, \qquad cp\,x_2 = 1 - sp\,x_2,$$

deci,

$$cp\,x_2 - cp\,x_1 = sp\,x_1 - sp\,x_2.$$

Inlocuind această expresie în (26), găsim

$$\alpha = 1.$$

Inlocuind această valoare în una din relaţiile (25), în prima de exemplu, avem

$$sp\,x_1 + cp\,x_1 + \beta \equiv 0,$$

care comparată cu (I), (căci $0 \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}$), ne impune să luăm, $\beta = -1$.

Deci pentru ca ecuaţia (24) să admită în primul cadran, rădăcinele x_1 şi x_2, trebuie să avem

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -1,$$

în care caz ecuaţia (24) trebuie să fie de forma,

$$sp\,x + cp\,x - 1 = 0.$$

Dar această ecuaţie este de fapt o identitate, căci este tocmai formula fundamentală (I), *de unde urmează că ea admite o infinitate de rădăcini în intervalul închis* $(0, \frac{\pi}{2})$ şi astfel teorema este demonstrată, în ipoteza că ecuaţia (24) are două rădăcini în primul cadran.

2°. Dacă arcele x_1 şi x_2, rădăcini ale ecuaţiei (24), ar fi ambele în cadranul al 2-lea, al 3-lea, sau al 4-lea, demonstraţia s'ar face absolut analog, cu singura deosebire că, în locul formulei (I), de care ne-am servit, ar intervini respectiv formulele fundamentale (II), (III), sau (IV).

Teorema enunţată este astfel generală, adică în orice cadran ar fi cuprinse ambele rădăcini x_1 şi x_2 ale ecuaţiei (24), această ecuaţie ar admite o infinitate de rădăcini în acele cadrane.

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

26. — *Soluţia generală a problemei 1768.*

In această problemă rezolvată la pag. 113 din numărul precedent, se cer patratele N^2 de 4 cifre care sunt simultan de formele *mult.* $3+1$, *mult.* $4+1$ şi *mult.* $5+1$. Să considerăm cazul general când N^2 are un număr oare-care de cifre, iar N^2-1 este simultan divizibil prin numerele 3, 4, 5. Aceste numere fiind prime între ele, N^2-1 se divide prin produsul lor. Deci trebuie ca

$$(1) \qquad N^2-1=(N-1)(N+1)=60\,m.$$

Numerele $N+1$ trebuind să fie neapărat perechi, avem

$$(2) \quad N-1=2p \qquad \text{şi} \qquad N+1=2p+2,$$

care duse în (1), dau

$$(3) \qquad p(p+1)=3\times 5\times m.$$

Numerele p şi $p+1$ fiind prime între ele, (3) ne arată că trebuie să avem

$$(4) \quad p=3q, \qquad \text{sau} \qquad (5) \quad p=3q-1.$$

Ducând pe (4) în (3), găsim

$$(6) \qquad q(3q+1)=5m,$$

care dă

$$(7) \quad q=5t, \qquad \text{sau} \qquad (8) \quad 3q+1=5\theta.$$

Ducând pe (7) în (4) şi apoi în (2), găsim soluţia generală

$$N=30t+1.$$

Plecând de la rezolvarea în numere întregi a lui (8) şi revenind la (4) şi apoi la (2) se găseşte soluţia

$$N=30t-11.$$

In fine plecând de la (5), se mai găsesc soluţiile

$$N=30t-1 \qquad \text{şi} \qquad N=30t+11,$$

aşa că soluţiile generale ale problemei sunt

$$N_1=30t\pm 1 \qquad \text{şi} \qquad N_2=30t\pm 11.$$

Pentru cazul particular al problemei 1768 trebuie ca

$$\sqrt{1000}<30t\pm 1<\sqrt{9999}$$

şi

$$\sqrt{1000}<30t\pm 11<\sqrt{9999},$$

sau

$$31<30t\pm 1<99 \quad \text{şi} \quad 31<30t\pm 11<99,$$

care dau cele 8 soluţii de la pagina 114.

Metoda aceasta se poate folosi şi la rezolvarea problemei 1890, propusă tot de autorul problemei 1768.

G-L GH. BUICLIU

27. — *Problème diophantien.*

Résoudre en nombres entiers le système des équations

$$x^3+y^3=u^2+v^2=z^2+t^2.$$

. . . . . .

La 1-re équation peut s'écrire

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=u^2+v^2.$$

Posons

$$\begin{cases} x+y=u'^2+v'^2 & (1)\\ x^2-xy+y^2=u''^2+v''^2. & (2)\end{cases}$$

Pour résoudre (2), prenons

$$x=\xi+\eta, \qquad y=\xi-\eta,$$

nous trouvons

$$\xi^2+3\eta^2=u''^2+v''^2.$$

Considérons l'identité

$$(q^2-mm'-nn'-pp')^2+[(m+m')q]^2+[(n+n')q]^2+[(p+p')q]^2=$$
$$(q^2+mm'+nn'+pp')^2+[(m-m')q]^2+[(n-n')q]^2+[(p-p')q]^2.$$

Posons $n=n'$, $p=p'$, puis $m+m'=n+n'=p+p'$, conditions qui se réduisent à $m+m'=2n=2p$. Donc $m'=2n-m$.

Nous obtenons ensuite

$$\begin{cases} \xi=q^2-m(2n-m)-2n^2=q^2-2mn+m^2-2n^2\\ \eta=2nq\\ u''=q^2+m(2n-m)+2n^2=q^2+2mn-m^2+2n^2\\ v''=2(m-n)q, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=q^2+m^2-2n^2-2mn+2nq\\ y=q^2+m^2-2n^2-2mn-2nq, \end{cases}$$

$$x+y=2q^2+2m^2-4n^2-4mn=u'^2+v'^2.$$

Posons $2q = Q$, $2m = M$, $2n = N$, il vient

$$Q^2 + M^2 - 2N^2 - 2MN = (u' + v')^2 + (u' - v')^2,$$

et

$$Q^2 + (M - N)^2 = 3N^2 + (u' + v')^2 + (u' - v')^2.$$

Dans l'identité

$$(a^2 - b\,b' - c\,c' - d\,d' - e\,e')^2 + [a(b + b')]^2 + [a(c + c')]^2 + [a(d + d')]^2 + [a(e + e')]^2 =$$
$$(a^2 + b\,b' + c\,c' + d\,d' + e\,e')^2 + [a(b - b')]^2 + [a(c - c')]^2 + [a(d - d')]^2 + [a(e - d')]^2,$$

faisons

$$c = c' = d = d' = e = e';$$

il vient

$$(a^2 + b\,b' + 3c^2)^2 + [a(b - b')]^2 = (a^2 - b\,b' - -3c^2)^2 + [a(b + b')]^2 + 3.(2ac)^2.$$

Nous avons

$$Q = a^2 + b\,b' + 3c^2, \qquad M - N = a(b - b'),$$
$$u' + v' = a^2 - b\,b' - 3c^2, \qquad u' - v' = a(b + b'),$$
$$N = 2ac.$$

D'ailleurs

$$u = u'u'' + v'v'', \qquad v = u'v'' - u''v',$$
$$z = u'v'' + u''v', \qquad t = u'u'' - v'v''.$$

On a donc une solution en fonction de 4 paramètres arbitraires a, b, b' et c.

Exemples numériques.

α. $a = 5$, $b = 2$, $b' = 1$, $c = 3$

$$3481^3 + (-2999)^3 = 112169^2 + 51241^2 = 100289^2 + 71761^2 \quad (= 15207524642);$$

β. $a = 5$, $b = 3$, $b' = 1$, $c = 2$

$$21^3 + (-11)^3 = 89^2 + 3^2 = 73^2 + 51^2 \quad (= 7930;$$

γ. $a = 1$, $b = 2$, $b' = 3$, $c = 2$.

$$466^3 + 162^3 = 8520^2 + 5732^2 = 9432^2 + 4060^2 \quad (= 105446224).$$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

---

28. — *Asupra unei clase de transformări particulare* $(\overline{OA}, \varphi)$.

Pentru o anumită clasă de funcțiuni $F(R, \theta)$, *transformările* $(\overline{OA}, \varphi)$ *pot fi considerate ca transformări rombice iterate* (φ, ψ).

In adevăr, se poate determina un unghiu ψ, cuprins între 0^0 și $\frac{\pi}{2}$, așa fel ca transformatul $(\overline{OA}, \varphi)$ al unui punct M să coincidă cu transformatul rombic iterat (φ, ψ) al lui M, pentru o anumită clasă de funcțiuni $F(R, \theta)$.

Domnul profesor *Valeriu Alaci* a stabilit pentru transformările $(\overline{OA}, \varphi)$ formulele

$$(1) \qquad \boxed{\begin{aligned} x &= F(R, \theta)\, cp\, \alpha \\ y &= k\, F(R, \theta\ sp\, \alpha \end{aligned}},$$

unde (x, y) sunt coordonatele punctului m, transformatul $(\overline{OA}, \varphi)$ al lui $M(R, \theta)$ și

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k}, \qquad k = tg\,\varphi,$$

iar pentru transformarea rombică iterată (φ, ψ)

$$(2) \qquad \boxed{r' = R\frac{k\,k_1 . sp\,\alpha . sp\,\alpha_1}{\sin^2\theta}},$$

unde r' este raza vectoare a punctului m', transformatul rombic iterat (φ, ψ) al punctului M și

$$(3)\ k = \operatorname{tg}\varphi, \quad k_1 = \operatorname{tg}\psi, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k}, \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k_1}$$

În coordonate polare formulele (1), dau

$$(4) \qquad r = \frac{F(R, \theta)\, cp\, \alpha}{\cos\theta} = \frac{k\, F(R, \theta)\, sp\, \alpha}{\sin\theta}.$$

Punând condiția ca transformatele $(\overline{OA}, \varphi)$ și rombic iterat ale punctului M să coincidă, din (2) și (4) am

$$R\frac{k\,k_1\, sp\,\alpha . sp\,\alpha_1}{\sin^2\theta} = \frac{k\, F(R\,\theta)\, sp\,\alpha}{\sin\theta},$$

care dă

$$(5) \qquad F(R, \theta) = R\frac{k_1\, sp\,\alpha_1}{\sin\theta}.$$

unde $k_1 = \operatorname{tg}\psi$ satisface

$$(6) \qquad 0 \leq k_1 \leq \infty.$$

Folosind formula fundamentală [1]

$$\boxed{|sp\,\alpha_1| = \frac{|\operatorname{tg}\alpha_1|}{1 + |\operatorname{tg}\alpha_1|}},$$

[1]) *Valeriu Alaci. Transformarea rombică și antirombică, Transformările* $(\overline{OA}, \varphi)$, R. M. T., Nr. 11, din 1940.

[1]) *V. Alaci. Nouveaux domaines de recherches en Trigonometrie quadratique.* Bul. de l'Ecole Polytechnique, Timișoara, Tome 9.

după (3) am

$$|sp\,\alpha_1| = \frac{|\operatorname{tg}\theta|}{|k_1| + |\operatorname{tg}\theta|},$$

ducând în (5)

$$|k_1| = \frac{|\sin\theta\, F(R,\theta_1)|}{R - |\cos\theta\, F(R,\theta)|},$$

ţinând seamă de (6), funcţiunile $F(R,\theta)$ trebuesc să satisfacă

$$0 \leq \frac{|\sin\theta \,.\, F(R,\theta)|}{R - |\cos\theta \,.\, F(R,\theta)|} \leq \infty.$$

care dă imediat

$$|F(R,\theta)| \leq \frac{R}{|\cos\theta|}. \tag{7}$$

Deci o transformare $(\overline{OA}, \varphi)$ poate fi considerată ca o transformare rombică iterată (φ, ψ) pentru toate funcţiunile $\overline{OA} = F(R,\theta)$ care satisfac relaţia (7).

Pentru această clasă de funcţiuni $F(R,\theta)$, transformările $(\overline{OA}, \varphi)$ admit transformări anti-$(\overline{OA}, \varphi)$, care nu sunt dacât transformări antirombice iterate.

C. BORS

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*. Anul XLVI, No. 4, Decemvrie 1940. Concursul „Gazetei Matematice". Algebra ornamentală (urmare), de *I. Ionescu*. Asupra problemei 3209 (urmare şi sfârşit), de *Tiberiu Popoviciu*. O problemă de geometrie a triunghiului (urmare şi sfârşit), de *Gh. D. Simionescu*. Asupra unor cercuri asociate triunghiului, de *R. Goormaghtigh*. O altă demonstraţie a unei chestiuni clasice elementare cu ajutorul geometriei şi mecanice, de *Alexandru I. Guţu*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Pozitiva*, revistă de matematici, Anul I, No. 4, Decemvrie 1940. O clasă de ecuaţii funcţionale, de *M. Ghermănescu*. Curbe raţionale *Ţiţeica*, de *Al. V. Niculescu*. O generalizare a formulei lui *Pascal*, de *E. Vişa*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

3. Prof. Ing. *Dion Mardan*. O activitate technică şi socială exprimată prin cifre.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 315. — *Pe malul mării sunt trei puncte* A, B, C *aşezate pe aceiaşi linie dreaptă. Distanţa* $AB = 600$ *m*, $BC = 1500$ *m. In largul mării, pe un vapor, se descarcă un tun, al cărui sunet soseşte în punctul* B *cu trei secunde mai târziu de cât în* C, *iar în* A *cu cinci secunde mai târziu de cât în* C. *La ce depărtare se află vaporul de cele trei puncte?*

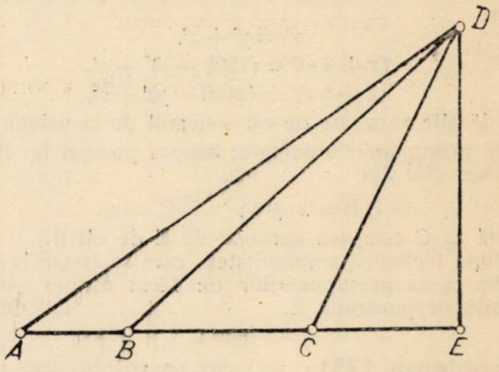
ER. CILCER

Soluţia I. Fie D punctul din care trage tunul, v viteza sunetului în *condiţiile atmosferice* ale tragerei şi E proecţia lui D pe AC. Dacă notăm cu t, timpul în secunde, întrebuinţat de sunet să ajungă de la D la C, atunci conform enunţului, vom avea:

$$DC = vt; \qquad DB = v(t+3); \qquad DA = v(t+5).$$

Aplicând teorema lui *Stewart* triunghiului ADC, avem

$$\overline{AB}\,.\,\overline{DC}^2 + \overline{BC}\,.\,\overline{DA}^2 = \overline{AC}\,.\,\overline{BD}^2 + \overline{AC}\,.\,\overline{AB}\,.\,\overline{BC}. \tag{1}$$



Inlocuim în (1) lungimile prin valorile lor în funcţie de v şi t, găsim:

$$600\,v^2t^2 + 1500\,v^2(t+5)^2 = 2100\,v^2(t+3)^2 + 600 \times 1500 \times 2100$$

$$t = \frac{1500 \times 2100 - 31\,v^2}{4\,v^2}. \tag{2}$$

***

Soluţia II. Presupunând că E este pe prelungirea lui AC şi notând

$$\overline{DC} = x; \qquad \overline{CE} = y; \qquad \overline{DE} = z;$$

triunghiurile dreptunghice CED, BED şi AED ne dau sistemul de ecuaţii:

$$x^2 = y^2 + z^2, \tag{3}$$

$$(x + 3v)^2 = z^2 + (y + 1500)^2, \tag{4}$$

$$(x + 5v)^2 = z^2 + (y + 2100)^2. \tag{5}$$

Rezolvind acest sistem se găsesc elementele cerute în enunţ.

Notă 1°. Au rezolvat problema pe calea indicată în soluţia II, D-nii: *Berdan C., Boghiu I., Bojin R., Bosie V., Hirsch A. I., Lepădatu M., Mihăileanu N. N., Mihăilescu R., Ştefănescu Em., Tăraş V., Teodorescu N.* şi *Vasiliu Gh.*

2°. Valoarea numerică a vitezei sunetului nu este dată în enunţ de acela am dat pe t la soluţia I par metric şi

tot aşa va trebui calculat din rezolvarea sistemului de la soluţia II.

3°. Recomandăm ca o problemă practică trebuie să aibă enunţul ei, datele corespunzătoare practicei. Altfel se întâmplă ca şi cu problema de faţă ai cărei rezolvitori, pe când erau în liceu, au găsit rezultate diferite pentru că au luat pentru v diferite valori numerice variind între 330 şi 341.

Se ştie din fizică, că dacă θ este temperatura aerului, atunci viteza sunetului în aer este dată de formula

$$v = 331\sqrt{1+\alpha\theta},$$

α fiind un coeficient numeric. Însuşi propunătorul problemei a presupus în soluţia sa $v = 340$.

4°. Problema mai cere o observaţie, anume: In soluţia II am presupus pe E pe prelungirea lui AC, fără să fi avut nici o indicaţie pentru aceasta. Dacă presupun însă pe E între B şi C, atunci sistemul de rezolvat la soluţia II, devine

$$x^2 = y^2 + z^2,$$
$$(x+3v)^2 = (1500-y)^2 + z^2,$$
$$(x+5v)^2 = (2100-y)^2 + z^2,$$

care dă alte rezultate de cât sistemul de la soluţia II.

Alte presupuneri topologice asupra poziţiei lui E nu se pot face, căci din

$$\overline{DB} = x + 3v > \overline{DC} = x,$$

rezultă că C este mai apropiat de E de cât B.

Soluţia I elimină ambiguitatea, care se iveşte la soluţia II, din cauza presupunerilor de făcut asupra poziţiilor posibile ale punctului E.

G-l Gh. B.

Problema 1731. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\begin{vmatrix} K_m^n & K_m^{n-1} & \dots & K_m^{n-m+1} \\ K_m^{n-1} & K_m^{n-2} & \dots & K_m^{n-m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_m^{n-m+1} & K_m^{n-m} & \dots & K_m^{n-2m+2} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(m-1)(m+4)}{2}},$$

în care m, n sunt întregi pozitivi, $n \geqq 2(m-1)$, iar K_p^r reprezintă numărul combinărilor cu repetiţie a p obiecte luate câte r. (Generalizarea problemei 1101. anul XIII, p. 82).

M. GHERMANESCU

Soluţie dată de d-l prof *Eugen Vişa.*

Vom transforma în primul rând identitatea de stabilit în alta în care să figureze combinările simple în locul celor cu repetiţie, utilizând relaţia de legătură:

$$K_m^n = C_{m+n-1}^n = C_{m+n-1}^{m-1}.$$

In felul aceasta vom avea:

$$\begin{vmatrix} C_{m+n-1}^{m-1} & C_{m+n-2}^{m-1} & \dots & C_m^{m-1} \\ C_{m+n-2}^{m-1} & C_{m+n-3}^{m-1} & \dots & C_{n-1}^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^{m-1} & C_{n-1}^{m-1} & \dots & C_{n-m+1}^{m-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(m-1)(m+4)}{2}}$$

şi făcând în plus schimbarea:

$$\begin{cases} m+n-1 = p+2q \\ m-1 = q, \end{cases}$$

adică:

$$\begin{cases} m = q+1 \\ n = p+q, \end{cases}$$

identitatea de stabilit urmează că se mai poate scrie şi sub forma:

$$\begin{vmatrix} C_{p+2q}^q & C_{p+2q-1}^q & \dots & C_{p+q}^q \\ C_{p+2q-1}^q & C_{p+2q-1}^q & \dots & C_{p+q-1}^q \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{p+q}^q & C_{p+q-1}^q & \dots & C_p^q \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}},$$

condiţiei $n \geqq 2(m-1)$ fiindu-i corespunzătoare astfel condiţia $p \geqq q$.

Ţinând încă seama că valoarea unui determinant nu se schimbă dacă inversăm în acelaş timp ordinea liniilor şi a coloanelor, rezultă în cele din urmă că identitatea de stabilit este echivalentă cu următoarea:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} C_p^q & C_{p+1}^q & \dots & C_{p+k}^q & \dots & C_{p+q-1}^q & C_{p+q}^q \\ C_{p+1}^q & C_{p+2}^q & \dots & C_{p+k+1}^q & \dots & C_{p+q}^q & C_{p+q+1}^q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{p+k}^q & C_{p+k+1}^q & \dots & C_{p+2k}^q & \dots & C_{p+k+q-1}^q & C_{p+k+q}^q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{p+q-1}^q & C_{p+q}^q & \dots & C_{p+q+k-1}^q & \dots & C_{p+2q-2}^q & C_{p+2q-1}^q \\ C_{p+q}^q & C_{p+q+1}^q & \dots & C_{p+q+k}^q & \dots & C_{p+2q-1}^q & C_{p+2q}^q \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} \qquad (p \geqq q).$$

Dacă în determinantul din primul membru al identității (1), pe care să-l notăm cu Δ, din elementele fiecărei linii, începând cu a doua, scădem elementele liniei precedente și ținem seama de relația:

$$C_r^q - C_{r-1}^q = C_r^{q\ 1}$$

urmează că acesta se mai poate scrie și sub forma:

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_p^q & C_{p+1}^q & \dots & C_{p+k}^q & \dots & C_{p+q-1}^q & C_{p+q}^q \\ C_p^{q-1} & C_{p+1}^{q-1} & \dots & C_{p+k}^{q-1} & \dots & C_{p+q-1}^{q-1} & C_{p+q}^{q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{p+k-1}^{q-1} & C_{p+k}^{q-1} & \dots & C_{p+2k-1}^{q-1} & \dots & C_{p+k+q-1}^{q-1} & C_{p+k+q-1}^{q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{p+q-2}^{q-1} & C_{p+q-1}^{q-1} & \dots & C_{p+q+k-2}^{q-1} & \dots & C_{p+2q-3}^{q-1} & C_{p+2q-2}^{q-1} \\ C_{p+q-1}^{q-1} & C_{p+q-1}^{q-1} & \dots & C_{p+q+k-1}^{q-1} & \dots & C_{p+2q-2}^{q-1} & C_{p+2q-1}^{q-1} \end{vmatrix}$$

de unde, operând în mod analog asupra coloanelor, deducem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_q^q & C_p^{q-1} & \dots & C_{p+k-1}^{q-1} & \dots & C_{p+q-2}^{q-1} & C_{p+q-1}^{q-1} \\ C_p^{q-1} & C_p^{q-2} & \dots & C_{p+k-1}^{q-2} & \dots & C_{p+q-2}^{q-2} & C_{p+q-1}^{q-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{p+k-1}^{q-1} & C_{p+k-1}^{q-2} & \dots & C_{p+2k-2}^{q-2} & \dots & C_{p+k+q-2}^{q-2} & C_{p+k+q-2}^{q-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{p+q-2}^{q-1} & C_{p+q-2}^{q-2} & \dots & C_{p+q+k-3}^{q-1} & \dots & C_{p+2q-4}^{q-2} & C_{p+2q-4}^{q-2} \\ C_{p+q-1}^{q-1} & C_{p+q-1}^{q-1} & \dots & C_{p+q+k-2}^{q-2} & \dots & C_{p+2q-3}^{q-2} & C_{p+2q-2}^{q-2} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Dacă se aplică, la rândul său, cuplul de operații, care ne-a condus dela determinantul (1) la determinantul (2), acestuia din urmă, începând însă de astă dată cu linia a treia și coloana a treia, apoi noului determinant astfel obținut, începând cu linia și coloana a patra și se repetă în urmă acest cuplu de operații asupra tuturor determinanților succesivi pe cari îi obținem în felul acesta, începând de fiecare dată cu linia și coloana respectiv următoare acelora cu care s'a început de data imediat anterioară, din aproape în aproape se deduce că, după q cupluri de astfel de operații, determinantul Δ se poate scrie sub forma:

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_p^q & C_p^{q-1} & \dots & C_p^{q-k} & \dots & C_p^1 & C_p^0 \\ C_p^{q-1} & C_p^{q-2} & \dots & C_p^{q-k-1} & \dots & C_p^0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_p^{q-k} & C_p^{q-k-1} & \dots & C_p^{q-2k} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_p^1 & C_p^0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_p^0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Observăm însă că determinantul (3) are toate elementele de sub diagonala secundară nule.

Ordinul acestui determinant fiind $q+1$, valoarea lui se găsește, după cum se poate ușor constata, înmulțind produsul elementelor diagonalei sale secundare prin $(-1)^{\frac{q(q+1)}{2}}$. Or, cum elementele acestei diagonale sunt egale între ele, valoarea lor comună fiind $+1$, rezultă în mod precis că avem:

$$\Delta = (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}},$$

ceeace constitue tocmai rezultatul urmărit, problema fiind în felul acesta complect rezolvată.

Notă. Identitatea de mai sus se poate demonstra direct, fără a trece la combinările simple, folosind relația

$$K_p^r = K_p^{r-1} + K_{p-1}^r. \tag{α}$$

Scădem coloana a doua din prima, a treia din a doua, etc, apoi repetăm operația până la coloana $(m-1)^{\alpha}$; repetăm operația până la coloana $(m-2)^{\alpha}$,

etc., ţinând seama la fiecare scădere de identitatea (α); vom obţine

$$D_m = \begin{vmatrix} K_1^n & K_2^{n-1} & \dots & K_m^{n-m+1} \\ K_1^{n-1} & K_2^{n-2} & \dots & K_m^{n-m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_1^{n-m+1} & K_2^{n-m} & \dots & K_m^{n-2m+2} \end{vmatrix}$$

repetăm operaţiile de mai sus asupra liniilor; vom obţine

$$D_m = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \dots & 0 & K_1^{n-m+1} \\ 0 & 0 & \dots 0 & K_1^{n-m+1} & K_2^{n-m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & K_1^{n-m+1} & \dots & \dots \\ K_1^{n-m+1} & K_2^{n-m} & \dots & K_m^{n-m+2} & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}$$

căci valoarea absolută este $(K_1^{n-m+1})^m = 1$

In modul acesta, demonstraţia este mai condensată, dacă nu mai simplă.

M. G

PROBLEME PROPUSE

1906. — Să se găsească un număr de forma $abba$, căruia adunându-i 4 să ne dea un patrat perfect.

SAVEL ŢARALUNGA

1907. — Să se găsească un patrat perfect de forma $abcdb$ în care cbd este un bipatrat, iar ac un patrat.

OSCAR SORIAN

1908. — Să se construiască un triunghiu ABC cunoscând latura BC, unghiul B şi raportul în care piciorul A' al bisectoarei AA' pe latura BC împarte distanţa II_a dintre centrul I al cercului înscris şi centrul I_a al cercului exînscris unghiului A.

G-L GH. BUICLIU

1909. — Prin vârful triunghiului semidreptunghic isoscel ABC $(AB = AC = 1)$ se duce o dreaptă Δ care taie latura BC în D între B şi C. Fie E proecţia lui D pe AB, iar P un punct pe DE între D şi E, astfel ca,

$$\overline{DP}(\sqrt{2}-1) = \overline{PE} \times \overline{DE} \times \sqrt{2}.$$

Paralela dusă prin P la AB cu înălţimea din B şi dreapta Δ, sunt cuncurente.

STELIAN CETATEANU

1910. — In triunghiul ABC circumscris cercului (r) se cunoaşte unghiul din C, precum şi relaţia

$$\overline{BD} \cdot \overline{DC} = k^2.$$

Să se construiască acel triunghiu cunoscând că D este punctul de tangenţă a cercului (r) cu BC, iar r este diferit de k.

S-LT. IOAN C. SAVIN

1911. — Să se rezolve şi să se găsească condiţia de compatibilitate a sistemului:

$$\begin{cases} (x^2+1)(y^2-1)(z^2-1) = a\,x\,y\,z \\ (y^2+1)(z^2-1)(x^2-1) = b\,x\,y\,z \\ (z^2+1)(x^2-1)(y^2-1) = c\,x\,y\,z \\ (x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) = d\,x\,y\,z. \end{cases}$$

IONEL I. STAMATE

1912. — Să se rezolve ecuaţia:

$$(sp\,x + \sin x)^2 + (cp\,x + \cos x)^2 = 3.$$

CPT. C COSTACHESCU

1913. — Să se determine α astfel ca ecuaţiile,

$$\begin{cases} sp\,x + \alpha\,cp\,x - \alpha^2 = 0 \\ sp\,x + 2\,\alpha\,cp\,x + \dfrac{1}{9} = 0, \end{cases}$$

să aibă o rădăcină comună în cadranul al 2-lea şi în urmă să se afle rădăcinele lor.

V. ALACI

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Radoslav G. Ion (1865, 1868, 1870, 1871); *Naneş Corneliu* (P.); *Tica P. Marin* (P., 1894, 1895 1896); *Gligor N. Ioan* (1687, 1698, 1827, 1834, 1840, 1848, 1851, 185 , 1856, 1863, 1883, 1884, 1888, 1896, 1902); *Lupescu Corneliu* (1840, 1877, 1902, 1904, 1905); *Checian N. Ana* (1827, 1828, 1834, 1856, 1858, 1867, 1876); *Cărlan S. Nicolae* (1792, 1793 1866, 1875, 1876); *Popescu Adrian* (P., 1874, 1875, 1876, 1879, 1892, 1896, 1898); *Costăchescu C.* (A); *Boerescu P. G.* (P., 1874, 1884).

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collaborations se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 286 articles, 249 notes et 1892 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIII, s'a primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Prof. Ion Rizescu.* Str. Mihăileanu 18, Constanţa.
2. *Prof. Constantin Borş.* Str. Petru Rareş 85, Piatra Neamţ.
3. D-l *Marin I. Popa,* Licenţiat în Matematici. Bulevardul Alexandru I. Cuza 20, Bucureşti II.
4. *Dr. Michail St. Botez,* profesor, Str. I. G. Duca 15, Piatra Neamţ.
5. *Stelian Cetăţeanu,* Calea Serban-Vodă 108, Bucureşti.
6. *Petre Sergescu,* profesor Universitar, Str. Ghica-Vodă 12, Craiova.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

A apărut volumul:

TRIGONOMETRIA PATRATICĂ

de

VALERIU ALACI

Profesor, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Lucrare premiată de „ACADEMIA ROMÂNĂ"

272 pagini — Preţul: 180 Lei.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XIX, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

ANUL XX. FEBRUARIE 1941 No. 12.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI**: UN NOU CAPITOL DE „GEOMETRIE ANALITICA" (URMARE).
3. NOTE MATEMATICE: 29.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1799.
6. PROBLEME PROPUSE: 1914-1921.
7. TABLA DE MATERII.
8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Avem plăcerea a anunţa că, începând de la 15 Ianuarie c., mai face parte dintre membrii „R. M. T." şi D-l Profesor *Ştefan Musta,* Inspector General secundar, un vechi şi distins colaborator, Str. Pavel 4, Beiuş.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XX, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIX inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XX — No. 12 TIMISOARA, FEBRUARIE 1941

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

UN NOU CAPITOL DE „GEOMETRIE ANALITICĂ".

SISTEME PARAMETRICE CARE REPREZINTĂ PATRULATERE RECTILINII ȘI INVERS.

DE PROF. V. ALACI.

(urmare [1])

Trecem la a 2-a parte a acestui articol, în care *vom invedera cum un anumit sistem parametric poate reprezenta un patrulater rectiliniu sau alte configurații liniare interesante.*

In acest scop vom soluționa întâi următoarea problemă generală.

Problemă. *Se cere graficul reprezentat de sistemul parametric,*

$$(27)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a_1\, sp\,\omega + b_1\, cp\,\omega + c_1}{a\, sp\,\omega + b\, cp\,\omega + c} \\ y = \dfrac{a_2\, sp\,\omega + b_2\, cp\,\omega + c_2}{a\, sp\,\omega + b\, cp\,\omega + c}, \end{cases}$$

ω fiind parametrul variabil.

Soluție. Din (1) deducem,

$$\begin{cases} (a\,x - a_1)\, sp\,\omega + (b\,x - b_1)\, cp\,\omega = c_1 - c\,x \\ (a\,y - a_2)\, sp\,\omega + (b\,y - b_2)\, cp\,\omega = c_2 - c\,y. \end{cases}$$

Rezolvind acest sistem în raport cu $sp\,\omega$, $cp\,\omega$, după regula lui *Cramer*, obținem:

$$(28)\qquad \begin{cases} sp\,\omega = \dfrac{A_1\,x + B_1\,y + C_1}{A\,x + B\,y + C} \\ cp\,\omega = \dfrac{A_2\,x + B_2\,y + C_2}{A\,x + B\,y + C}, \end{cases}$$

unde A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A, B, C sunt respectiv coeficienții lui x, y și termenul liber din expresiile,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 - c\,x & b\,x - b_1 \\ c_2 - c\,y & b\,y - b_2 \end{vmatrix} =$$

$$(c_1 - c\,x)(b\,y - b_2) - (b\,x - b_1)(c_2 - c\,y),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a\,x - a_1 & c_1 - c\,x \\ a\,y - a_2 & c_2 - c\,y \end{vmatrix} =$$

$$(a\,x - a_1)(c_2 - c\,y) - (c_1 - c\,x)(a\,y - a_2),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a\,x - a_1 & b\,x - b_1 \\ a\,y - a_2 & b\,y - b_2 \end{vmatrix} =$$

$$(a\,x - a_1)(b\,y - b_2) - (b\,x - b_1)(a\,y - a_2),$$

anume:

$$(29)\qquad \begin{aligned} A_1 &= b_2\,c - b\,c_2, & B_1 &= b\,c_1 - b_1\,c, \\ A_2 &= a\,c_2 - a_2\,c, & B_2 &= a_1\,c - a\,c_1, \\ A &= a_2\,b - a\,b_2, & B &= a\,b_1 - a_1\,b, \\ & & C_1 &= b_1\,c_2 - b_2\,c_1, \\ & & C_2 &= a_2\,c_1 - a_1\,c_2, \\ & & C &= a_1\,b_2 - a_2\,b_1. \end{aligned}$$

Funcțiunile patratice $sp\,\omega$, $cp\,\omega$ satisfăcând formulele fundamentale [2] (I), (II), (III), (IV), după cadranele în care variază ω, suntem obligați a găsi, pe rând, graficele corespunzătoare, care reunite ne vor da graficul cerut.

Avem astfel a cerceta următoarele cazuri:

Cazul $0 \leq \omega \leq \dfrac{\pi}{2}$.

In acest caz, funcțiunile $sp\,\omega$, $cp\,\omega$ satisfac formula fundamentală (I), astfel că adunând relațiile (28) și aducând la forma întreagă, obținem ecuația,

$$(D_1)\qquad (A_1 + A_2 - A)\,x + (B_1 + B_2 - B)\,y + C_1 + C_2 - C = 0,$$

[1]) A se vedea „R. M. T.", No. 11, 1941.

[2]) Idem.

care reprezintă o dreaptă (D_1), pe care o figurăm într'un sistem de axe rectangulare xOy, (fig. 1).

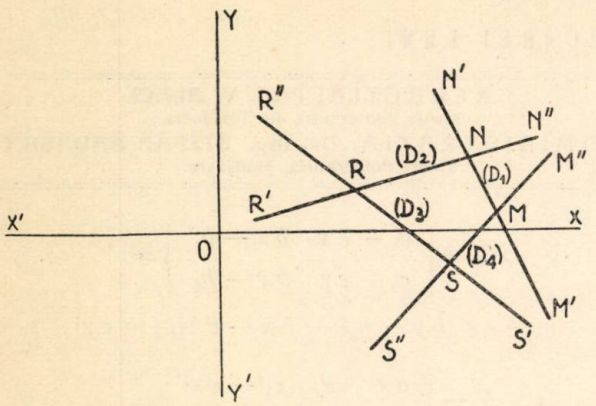


Fig. 1.

Nu însă toate punctele lui (D_1), aparţin configuraţiei cerute, ci numai acelea compatibile, evident, cu relaţiile (27).

Pentru aceasta, să căutăm limitele între care rămân cuprinşi x, y din (27), când ω variază în intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$.

Vom observa întâi că, pentru $\omega = 0$ şi $\omega = \frac{\pi}{2}$, din (27) deducem respectiv,

$$(30)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 + c_1}{b + c} \\ y_1 = \dfrac{b_2 + c_2}{b + c} \end{cases} \qquad (31)\quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{a_1 + c_1}{a + c} \\ y_2 = \dfrac{a_2 + c_2}{a + c} \end{cases}$$

şi astfel avem două puncte $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ situate pe dreapta (D_1).

Care poate fi situaţia acestor puncte?

1°. Punctele M, N ale dreptei (D_1) sunt la distanţă finită, dacă avem,

$$(32)\qquad (b + c)(a + c) \neq 0.$$

2°. Dacă,

$$b + c = 0, \quad \text{dar} \quad (b_1 + c_1)(b_2 + c_2)(a + c) \neq 0,$$

atunci punctul *M* este la infinit, iar N la distanţă finită; analog dacă,

$$a + c = 0, \quad \text{dar} \quad (a_1 + c_1)(a_2 + c_2)(b + c) \neq 0,$$

N este la infinit şi M la distanţă finită.

Vom preciza în cele ce urmează, în ce parte a dreptei (D_1) sunt la infinit, punctele M sau N.

3°. Dacă avem simultan,

$$(33)\quad \begin{cases} b + c = 0 \\ b_1 + c_1 = 0, \end{cases} \quad \text{dar} \quad (b_2 + c_2)(a + c) \neq 0,$$

atunci punctul N este la distanţă finită, iar coordonatele lui M sunt

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{0}{0} \\ y_1 = \pm \infty. \end{cases}$$

Absciza x_1, care se obţine din prima relaţie din (27), pentru $\omega = 0$, având o formă nedeterminată, aplicăm regula lui *Hôspital*, ţinând seamă de formulele de derivare ale funcţiunilor patratice din „T. P.“ [1], p. 25—26 şi găsim

$$|x|_{\omega = 0} = \frac{a_1 - b_1}{a - b} = x_1.$$

De altă parte, prima relaţie din (31), ţinând seamă de condiţiile (33), devine

$$x_2 = \frac{a_1 + c_1}{a + c} = \frac{a_1 - b_1}{a - b} = x_1,$$

ceeace înseamnă că dreapta (D_1) este paralelă cu Oy, ecuaţia ei fiind

$$(34)\qquad x = \frac{a_1 - b_1}{a - b}.$$

Punctul M este astfel la infinit pe dreapta (34), într'o direcţie pe care o vom preciza în aplicaţii. Concluzii analoage, pentru condiţii ce ar schimba rolul lui *x* şi *y*, sau ar schimba punctele M şi N între ele.

4°. Dacă avem simultan

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a + c = 0, \end{cases}$$

rezultă,

$$a = b = -c$$

şi numitorul comun din (27), devine

$$a(sp\,\omega + cp\,\omega - 1)$$

expresiune care este identic nulă, când $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$, în virtutea formulei fundamentale (I).

In acest caz, punctele M şi N sunt aruncate la infinit, dar şi întreaga dreaptă (D_1) este aruncată la infinit.

[1]) „T. P.“ înseamnă *„Trigonometria Patratică“*.

5°. Punctele M şi N ale dreptei (D_1), care în condiţia (32) sunt la distanţă finită, *sunt şi distincte,* dacă

$$x_1 \neq x_2$$

şi *sunt confundate,* dacă

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

Odată această discuţie, asupra situaţiei punctelor M, N ale dreptei (D_1), fiind terminată, *rămâne a preciza de aci înainte, ce porţiuni ale dreptei* (D_1) *aparţin graficului cerut, atunci când* ω *variază continuu în intervalul închis* $(0, \frac{\pi}{2})$, fiindcă după cum am mai spus, numai acele puncte ale dreptei (D_1) aparţin graficului cerut, care sunt compatibile cu sistemul (27).

Dacă privim x, y din (27) drept coordonate ale unui punct P, acest punct este situat, evident, pe dreapta (D_1) şi variază cu ω, coincizând cu M, sau N, respectiv pentru $\omega = 0$ şi $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Pentru-că x, y din (27) sunt funcţiuni continue de ω, le derivăm, folosind formulele de derivare din „T. P.“,

$$(sp\,\omega)' = sp^2\omega + cp^2\omega, \quad (cp\,\omega)' = -(sp^2\omega + cp^2\omega),$$

(valabile pentru $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$) şi obţinem după unele reduceri:

$$\begin{cases} x'_\omega = \dfrac{a_1(b+c) - b_1(a+c) - c_1(a-b)}{(a\,sp\,\omega + b\,cp\,\omega + c)^2} \cdot (sp^2\omega + cp^2\omega), \\ y'_\omega = \dfrac{a_2(b+c) - b_2(a+c) - c_2(a-b)}{(a\,sp\,\omega + b\,cp\,\omega + c)^2} \cdot (sp^2\omega + cp^2\omega). \end{cases}$$

Aceste derivate vedem că, nu se anulează pentru nici o valoare a lui ω din intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$; apoi că ele ar putea deveni infinite pentru o rădăcină ω_1 $(0 \leq \omega_1 \leq \frac{\pi}{2})$ a ecuaţiei

$$a\,sp\,\omega + b\,cp\,\omega + c = 0, \tag{35}$$

dar că, ele trecând prin infinit nu-şi schimbă semnul.

Rezultă din aceste consideraţii că, x şi y sunt funcţiunii crescătoare, descrescătoare sau constante, după cum cătimele,

$$a_1(b+c) - b_1(a+c) - c_1(a-b),$$
$$a_2(b+c) - b_2(a+c) - c_2(a-b),$$

sunt pozitive, negative sau nule.

Cum, de altă parte, variabila ω *este supusă la o restricţie de interval* $(0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2})$, *rezultă că, x şi y admit extreme tocmai pentru extremităţile intervalului.*

Observare. Puteam ajunge la aceste concluzii şi fără studiul derivatelor, observând că x, y, funcţiuni continue de ω, sunt coordonatele unui punct P al dreptei (D_1), care coincide cu M şi N, respectiv, pentru $\omega = 0$ şi $\omega = \frac{\pi}{2}$. Când prin urmare ω variază în intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$, punctul P pleacă din M şi ajunge în N, fie descriind segmentul MN, fie trecând prin infinit ca să ajungă din M în N, (adică descriind semidreptele MM', N'N), după cum ecuaţia (35) nu are sau are o rădăcină în intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$; în ambele cazuri rezultă că, *funcţiunile x, y sunt crescătoare, descrescătoare sau constante.*

Ţinând seamă de aceste concluzii şi de situaţia punctelor M, N, *suntem acum în măsură să precizăm, care puncte ale dreptei* (D_1) *aparţin graficului cerut, când* ω *variază în intervalul închis* $(0, \frac{\pi}{2})$.

a. Dacă punctele $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ sunt la distanţă finită şi sunt distincte, adică

$$(b+c)(a+c) \neq 0, \qquad x_1 \neq x_2$$

şi mai mult, dacă ecuaţia

$$a\,sp\,\omega + b\,cp\,\omega + c = 0$$

n'are rădăcinî în intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$, atunci *punctul* P(x, y) *parcurge segmentul* MN *al dreptei* (D_1), când ω variază în intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$.

Prin urmare, în aceste condiţii, *graficul cerut corespunzător intervalului închis* $(0, \frac{\pi}{2})$, *este format din segmentul* MN.

b. Dacă punctele M, N sunt tot la distanţă finită şi distincte, adică dacă avem,

$$(b+c)(a+c) \neq 0, \qquad x_1 \neq x_2,$$

dar ecuaţia,

$$a\,sp\,\omega + b\,cp\,\omega + c = 0,$$

are o rădăcină ω_1, în intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$, ea introdusă în (27), ne dă

$$\begin{cases} x = \pm\infty \\ y = \pm\infty \end{cases}$$

şi atunci rezultă că, *punctul* P(x, y) *parcurge întâi semidreapta* MM′, *când* $0 \leq \omega \leq \omega_1$ *şi apoi semidreapta* N′N, *când* $\omega_1 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$.

Putem spune astfel că, P pleacă tot din M şi ajunge în N, dar trecând prin infinit.

Prin urmare în aceste condiţii, *graficul cerut corespunzător intervalului închis* $(0, \frac{\pi}{2})$ *este format din semidreptele* MM′ şi N′N.

c. Dacă unul din punctele M sau N este aruncat la infinit, M de exemplu, N rămânând la distanţă finită, adică dacă avem

$$b + c = 0, \quad \text{dar} \quad a + c \neq 0,$$

atunci punctul P parcurge una din semidreptele M′N, sau N′N şi anume aceea pe care se mai află un punct, ce corespunde la o valoare oarecare ω_1 $(0 < \omega_1 < \frac{\pi}{2})$, de exemplu $\omega_1 = 45^0$, coordonatele acestui punct, deduse din (27), fiind

$$(36) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a_1 + b_1 + 2c_1}{a + b + 2c} \\ y = \dfrac{a_2 + b_2 + 2c_2}{a + b + 2c}. \end{cases}$$

Prin urmare, în aceste condiţii, *graficul cerut corespunzător intervalului închis* $(0, \frac{\pi}{2})$, *este format din una din semidreptele* M′N, N′N *şi anume aceea pe care se găseşte punctul* (36).

Concluzie analoagă, când N este la infinit şi M este la distanţă finită.

d. Dacă punctele M, N sunt ambele aruncate la infinit, adică dacă avem simultan,

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a + c = 0, \end{cases}$$

atunci punctul P(x, y) corespunzător oricărei valori ω din intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$, este aruncat la infinit, cum am explicat în 4°.

In aceste condiţii, *graficul cerut corespunzător intervalului închis* $(0, \frac{\pi}{2})$, *este format din punctele de la infinit corespunzătoare acestui interval.*

e. Dacă punctele M, N sunt ambele la distanţă finită, dar confundate, ceea ce se întâmplă când avem simultan

$$\begin{cases} (b + c)(a + c) \neq 0, \\ x_1 = x_2 = h_1, \\ y_1 = y_2 = k_1, \end{cases}$$

atunci înlocuind x, y din (27) respectiv prin h_1, k_1, rezultă că ecuaţiile

$$(37) \qquad \begin{aligned} \frac{a_1 \, sp\,\omega + b_1 \, cp\,\omega + c_1}{a \, sp\,\omega + b \, cp\,\omega + c} &= h_1, \\ \frac{a_2 \, sp\,\omega + b_2 \, cp\,\omega + c_2}{a \, sp\,\omega + b \, cp\,\omega + c} &= k_1, \end{aligned}$$

sunt verificate fiecare pentru $\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ şi cum ecuaţiile (37) se pot reduce la forma,

$$sp\,\omega^2 + \alpha \, cp\,\omega + \beta = 0,$$

ele admiţând două rădăcini $0, \frac{\pi}{2}$ în primul cadran, în virtutea teoremei demonstrate în partea I-a, p. 134 din n-rul trecut, rezultă că ele admit, fiecare, orice rădăcină din intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$.

In aceste condiţii, conchidem că, *graficul cerut corespunzător intervalului închis* $(0, \frac{\pi}{2})$, *este format numai dintr'un singur punct, de coordonate,*

$$\begin{cases} x = h_1 \\ y = k_1. \end{cases}$$

Cazul $\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \pi$.

In acest caz, funcţiunile $sp\,\omega$, $cp\,\omega$ satisfac formula fundamentală (II), astfel că scăzând relaţiile (28) şi aducând la forma întreagă, obţinem ecuaţia,

$$(D_2) \qquad (A_1 - A_2 - A)x + (B_1 - B_2 - B)y + C_1 - C_2 - C = 0,$$

care reprezintă o dreaptă (D_2).

Nu toate punctele acestei drepte aparţin însă graficului cerut, când ω variază în intervalul închis $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, ci numai acelea compatibile, evident, cu relaţiile (27).

Trebuesc deci aflate limitele între care rămân cuprinşi x, y din (27), *când* ω *variază în intervalul închis* $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Observăm întâi că, pentru $\omega = \frac{\pi}{2}$ şi $\omega = \pi$' din (27) deducem respectiv,

$$(38)\quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{a_1 + c_1}{a + c} \\ y_2 = \dfrac{a_2 + c_2}{a + c}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = \dfrac{c_1 - b_1}{c - b} \\ y_3 = \dfrac{c_2 - b_2}{c - b} \end{cases}$$

şi astfel avem două puncte $N(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ situate pe dreapta (D_2), punctul N fiind, cum se vede, comun dreptelor (D_1), (D_2).

O discuţie absolut analoagă, cu aceea din cazul precedent, se poate face, atât în privinţa situaţiei punctelor N, R, cât şi a graficului corespunzător, când $\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \pi$.

Astfel, ca şi în cazul precedent, suntem îndreptăţiţi a formula următoarele concluzii:

Graficul cerut, corespunzător acestui caz, este format din:

a. Segmentul NR, dacă punctele N, R sunt la distanţă finită şi distincte, adică dacă avem,

$$(a + c)(c - b) \neq 0, \qquad x_2 \neq x_3$$

şi dacă ecuaţia,

$$a\, sp\, \omega + b\, cp\, \omega + c = 0,$$

n'are rădăcini în cadranul al 2-lea, (fig. 1).

b. Semidreptele NN'' şi R' R, dacă avem

$$(a + c)(c - b) \neq 0, \qquad x_2 \neq x_3,$$

adică dacă punctele N, R sunt tot la distanţă finită şi distincte, dar ecuaţia

$$a\, sp\, \omega + b\, cp\, \omega + c = 0,$$

are o rădăcină în cadranul al 2-lea.

c. Una din semidreptele N'' R, R' R, dacă punctul N este aruncat la infinit, R rămânând la distanţă finită, adică dacă

$$a + c = 0, \qquad \text{dar} \qquad c - b \neq 0;$$

sau *una din semidreptele N'' N, R' N,* dacă punctul R este aruncat la infinit, N rămânând la distanţă finită, adică dacă

$$c - b = 0, \qquad \text{dar} \qquad a + c \neq 0.$$

Se va preciza care din semidreptele de mai sus, este cea corespunzătoare, într'un caz sau altul, prin determinarea încă a unui punct ce corespunde la o valoare oarecare ω_1 $(\frac{\pi}{2} \leq \omega_1 \leq \pi)$, de exemplu $\omega_1 = 135^0$, coordonatele acestui punct deducându-se din (27) şi fiind,

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_1 - b_1 + 2c_1}{a - b + 2c} \\ y = \dfrac{a_2 - b_2 + 2c_2}{a - b + 2c}. \end{cases}$$

d. Punctele de la infinit ce corespund fiecărui ω din intervalul închis $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, dacă punctele N, R sunt ambele aruncate la infinit, ceea-ce se întâmplă când avem simultan,

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ c - b = 0 \end{cases}$$

cum am explicat în 4^0.

e. Punctul de coordonate,

$$\begin{cases} x = h_2 \\ y = k_2 \end{cases},$$

dacă punctele N, R sunt ambele la distanţă finită şi confundate, ceea-ce se întâmplă când avem simultan,

$$\begin{cases} (a + c)(c - b) \neq 0 \\ x_2 = x_3 = h_2 \\ y_2 = y_3 = k_2 \end{cases}$$

aşa cum am explicat în 5^0.

Cazul $\pi \leq \omega \leq \frac{3\pi}{2}$.

In acest caz, funcţiunile $sp\,\omega$, $cp\,\omega$ satisfac formula fundamentală (III), astfel că adunând relaţiile (28) şi aducând la forma întreagă, obţinem ecuaţia,

$$(D_3)\quad (A_1 + A_2 + A)x + (B_1 + B_2 + B)y + C_1 + C_2 + C = 0,$$

care reprezintă o dreaptă (D_3).

Nu toate punctele acestei drepte aparţin însă graficului cerut, când ω variază în intervalul închis $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, ci numai acelea compatibile, evident, cu relaţiile (27).

Trebuesc deci aflate limitele între cari rămân cuprinşi x, y din (27), când ω variază în intervalul închis $(\pi, \frac{3\pi}{2})$.

Observăm întâi că, pentru $\omega=\pi$ şi $\omega=\frac{3\pi}{2}$, din (27) deducem respectiv,

$$(39)\quad \begin{cases} x_3=\dfrac{c_1-b_1}{c-b} \\ y_3=\dfrac{c_2-b_2}{c-b} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4=\dfrac{c_1-a_1}{c-a} \\ y_4=\dfrac{c_2-a_2}{c-a} \end{cases}$$

şi astfel avem două puncte R (x_3, y_3), S (x_4, y_4) situate pe dreapta (D_3), punctul R fiind comun dreptelor (D_2), (D_3).

O discuţie absolut analoagă, cu aceia din primul caz $(0\leq\omega\leq\frac{\pi}{2})$, se poate face, atât în privinţa situaţiei punctelor R, S, cât şi a graficului corespunzător, când $\pi\leq\omega\leq\frac{3\pi}{2}$.

Astfel, ca şi în cazul precedent, suntem îndreptăţiţi a formula următoarele concluzii:

Graficul cerut corespunzător acestui caz, este format din:

a. Segmentul RS, dacă punctele R, S sunt la distanţă finită şi distincte, adică când avem,

$$(c-b)(c-a)\neq 0, \qquad x_3\neq x_4$$

şi dacă ecuaţia

$$a\,sp\,\omega+b\,cp\,\omega+c=0,$$

n'are rădăcini în cadranul al 3-lea.

b. Semidreptele RR'', S'S, dacă avem

$$(c-b)(c-a)\neq 0, \qquad x_3\neq x_4,$$

adică dacă punctele R, S sunt tot la distanţă finită şi distincte, dar ecuaţia

$$a\,sp\,\omega+b\,cp\,\omega+c=0,$$

are o rădăcină în cadranul al 3-lea.

c. Una din semidreptele SS', SR'', dacă punctul *R* este aruncat la infinit, *S* rămânând la distanţă finită, adică dacă

$$c-b=0, \quad \text{dar} \quad c-a\neq 0;$$

sau *una din semidreptele RR'', RS'*, dacă punctul S este aruncat la infinit, R rămânând la distanţă finită, adică dacă

$$c-a=0, \quad \text{dar} \quad c-b\neq 0.$$

Se va preciza care din semidreptele de mai sus, este cea corespunzătoare, într'un caz sau altul, prin determinarea încă a unui punct ce corespunde la o valoare oarecare ω_1, $(\pi\leq\omega_1\leq\frac{3\pi}{2})$, de exemplu $\omega_1=225^0$, coordonatele acestui punct deducându-se din (27 şi fiind

$$\begin{cases} x=\dfrac{a_1+b_1-2c_1}{a+b-2c} \\ y=\dfrac{a_2+b_2-2c_2}{a+b-2c}. \end{cases}$$

d. Punctele de la infinit ce corespund fiecăru ω din intervalul închis $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, dacă punctele R, S sunt ambele aruncate la infinit, ceea-ce se intâmplă când avem simultan

$$\begin{cases} c-b=0 \\ c-a=0, \end{cases}$$

cum am explicat în 4°.

e. Punctul de coordonate,

$$\begin{cases} x=h_3 \\ y=k_3, \end{cases}$$

dacă punctele R, S sunt ambele la distanţă finită şi confundate, ceea ce se întâmplă când avem simultan

$$\begin{cases} (c-b)(c-a\neq 0 \\ x_3=x_4=h_3 \\ y_3=y_4=k_3, \end{cases}$$

aşa cum am explicat în 5°.

Cazul $\frac{3\pi}{2}\leq\omega\leq 2\pi$.

In acest caz, funcţiunile $sp\,\omega$, $cp\,\omega$ satisfac formula fundamentală (IV), astfel că scăzând relaţiile (28) şi aducând la forma întreagă, obţinem ecuaţia,

$$(D_4)\quad (A_1-A_2+A)x+(B_1-B_2+B)y+C_1-C_2+C=0,$$

care reprezintă o dreaptă (D_4).

Nu toate punctele acestei drepte aparţin însă graficului cerut, când ω variază în intervalul închis $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, ci numai acelea compatibile, evident, cu relaţiile (27).

Trebuesc deci aflate limitele între cari rămân cuprinşi x, y din (27), *când ω variază în întervalul închis* $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

Observăm întâi că, pentru $\omega = \frac{3\pi}{2}$ și $\omega = 2\pi$, din (27) deducem

$$(40)\quad \begin{cases} x_4 = \dfrac{c_1 - a_1}{c - a} \\ y_4 = \dfrac{c_2 - a_2}{c - a} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 + c_1}{b + c} \\ y_1 = \dfrac{b_2 + c_2}{b + c}, \end{cases}$$

astfel avem două puncte $S(x_4, y_4)$, $M(x_1, y_1)$ situate pe dreapta (D_4), punctul S fiind comun dreptelor (D_3), (D_4), iar punctul M fiind comun dreptelor $(D)_4$, (D_1).

O discuție absolut analoagă, cu aceia din primul caz $\left(0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}\right)$, se poate face, atât în privința punctelor S, M, cât și a graficului corespunzător, când $\frac{3\pi}{2} \leq \omega \leq 2\pi$. Astfel, ca și în cazul precedent, suntem îndreptățiți a formula următoarele concluzii:

Graficul cerut corespunzător acestui caz, este format din:

a. Segmentul S M, dacă punctele S, M sunt la distanță finită și distincte, adică când avem

$$(c - a)(b + c) \neq 0, \qquad x_4 \neq x_1$$

și dacă ecuația,

$$a\,sp\,\omega + b\,cp\,\omega + c = 0,$$

n'are rădăcini în cadranul al 4-lea.

b. Semidreptele S S'', *M'' M*, dacă avem

$$(c - a)(b + c) \neq 0, \qquad x_4 \neq x_1$$

adică dacă punctele S, M sunt tot la distanță finită și distincte, dar ecuația

$$a\,sp\,\omega + cp\,\omega + c = 0,$$

are o rădăcină în cadranul al 4-lea.

c. Una din semidreptele M S'', *M M''*, dacă S este aruncat la infinit, M rămânând la distanță finită, adică dacă

$$c - a = 0, \quad \text{dar} \quad b + c \neq 0;$$

sau *una din semidreptele S S''*, *S M''*, dacă M este la infinit, S rămânând la distanță finită, adică dacă

$$b + c = 0, \quad \text{dar} \quad c - a \neq 0.$$

Se va preciza care din semidreptele de mai sus, este cea corespunzătoare, într'un caz sau altul, prin determinarea încă a unui punct ce corespunde la o valoare ω_1 $\left(\frac{3\pi}{2} \leq \omega_1 \leq 2\pi\right)$, de exemplu $\omega_1 = 315^0$, coordonatele acestui punct deducându-se din (27) și fiind,

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_1 - b_1 - 2c_1}{a - b - 2c} \\ y = \dfrac{a_2 - b_2 - 2c_2}{a - b - 2c}. \end{cases}$$

d. Punctele de la infinit corespunzătoare fiecărui ω *din intervalul închis* $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, dacă punctele S, M sunt ambele aruncate la infinit, ceea ce se întâmplă când avem simultan

$$\begin{cases} c - a = 0 \\ b + c = 0, \end{cases}$$

cum am explicat în 4°.

e. Punctul de coordonate,

$$\begin{cases} x = h_4 \\ y = k_4, \end{cases}$$

dacă punctele S, M sunt ambele la distanță finită și confundate, ceea ce se întâmplă când avem simultan,

$$\begin{cases} (c - a)(b + c) \neq 0 \\ x_4 = x_1 = h_4 \\ y_4 = y_1 = k_4, \end{cases}$$

așa cum am explicat în 5°.

După această discuție detailată relativ la sistemul parametric (27), care a pus în evidență graficele parțiale ce se pot obține, când ω variază pe rând în diferitele cadrane, se impune să facem o sinteză și să răspundem, *care este graficul complect reprezentat de sistemul parametric* (27).

In acest scop, desprindem din cele expuse până aci, următoarele concluzii:

A. *Graficul reprezentat de sistemul parametric* (27), *este patrulaterul rectiliniu M N R S*, dacă punctele M, N, R, S, ale căror coordonate se obțin din (27), respectiv, pentru $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, sunt la distanță finită, sunt distincte, și numai dacă ecuația

$$a\,sp\,\omega + b\,cp\,\omega + c = 0,$$

n'are rădăcină în nici unul din cele patru cadrane.

B. Dacă punctele M, N, R, S sunt tot la distanță finită, sunt distincte, însă ecuația

$$a\,sp\,\omega + b\,cp\,\omega + c = 0$$

are o rădăcină ω_1 într'unul din cadrane, ceea ce, după cele știute din partea I-a, atrage existența și a unei rădăcini ω_2 într'un alt cadran, atunci *graficul reprezentat de sistemul parametric* (27), *se obține din patrulaterul rectiliniu MNRS, suprimându-i laturile corespunzătoare cadranelor în care se află rădăcinele* ω_1 *și* ω_2 *și înlocuindu-le cu prelungirile lor de o parte și alta.*

C. Dacă unul din punctele M, N, R, S este aruncat la infinit, celelalte trei rămânând la distanță finită și dacă ecuația

$$a\,sp\,\omega + b\,cp\,\omega + c = 0,$$

n'are altă rădăcină de cât pe aceea dintre arcele $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, care face ca unul din punctele de mai sus să fie aruncat la infinit, ea aparținând de fapt la două cadrane consecutive, atunci *graficul reprezentat de sistemul parametric* (27), *este format dintr'un contur liniar deschis, compus din două semidrepte paralele și din segmentele ce unesc primul punct la distanță finită cu al 2-lea și acesta din urmă cu al 3-lea, în ordinea obținerei lor.*

Din acest grafic, va trebui însă să suprimăm unul din segmente și să'l înlocuim prin prelungirile lui de o parte și alta, dacă se întâmplă ca ecuația

$$a\,sp\,\omega + b\,cp\,\omega + c = 0,$$

să admită și o rădăcină în cadranul corespunzător segmentului.

D. Presupunem două dintre punctele M, N, R, S aruncate la infinit, celelalte două rămânând la distanță finită și fiind distincte, ceeace are loc când ecuația

$$a\,sp\,\omega + b\,cp\,\omega + c = 0,$$

are două rădăcini printre arcele $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

1°. Dacă cele două puncte de la infinit sunt circular consecutive, atunci *graficul reprezentat de sistemul parametric* (27), *este format din două semidrepte cu extremitățile în punctele distincte de la distanță finită, din segmentul care unește aceste din urmă două puncte și din punctele de la infinit corespunzătoare valorilor lui* ω *din cadranul ce cuprinde cele două rădăcini.*

Direcția semidreptelor se precizează prin determinarea a încă unui punct a lor, pentru câte o valoare a lui ω *particulară, convenabilă, cum am mai arătat.*

2°. Dacă cele două puncte de la infinit nu sunt însă consecutive, atunci *graficul reprezentat de sistemul parametric (27) este format din laturile a două unghiuri cu vârfurile, respectiv, în cele două puncte de la distanță finită, direcția laturilor fiind precizată prin determinarea a încă unui punct pe fiecare din ele, obținut dând lui* ω *în (27) valori particulare, convenabile, cum am mai arătat.*

E. **Teoremă.** *Dacă punctele M, N, R, S sunt la distanță finită, dar două dintre ele coincid într'un punct T, atunci T împreună cu celelalte două puncte distincte, sunt coliniare.*

Demonstrație. Știm că cele patru puncte M, N, R, S se obțin, pe rând, din sistemul (27) pentru $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Astfel avem:

$$M\left(\frac{b_1+c_1}{b+c}, \frac{b_2+c_2}{b+c}\right), \quad N\left(\frac{a_1+c_1}{a+c}, \frac{a_2+c_2}{a+c}\right),$$

$$R\left(\frac{c_1-b_1}{c-b}, \frac{c_2-b_2}{c-b}\right), \quad S\left(\frac{c_1-a_1}{c-a}, \frac{c_2-a_2}{c-a}\right).$$

Presupunem că punctele M, N, de exemplu, coïncid în punctul T, atunci avem,

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{b_1+c_1}{b+c} = \dfrac{a_1+c_1}{a+c} = \dfrac{a_1-b_1}{a-b} = m \\ \dfrac{b_2+c_2}{b+c} = \dfrac{a_2+c_2}{a+c} = \dfrac{a_2-b_2}{a-b} = n. \end{cases}$$

Formăm acum următorul determinant cu ajutorul coordonatelor punctelor T, R, S,

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & n & 1 \\ \dfrac{c_1-b_1}{c-b} & \dfrac{c_2-b_2}{c-b} & 1 \\ \dfrac{c_1-a_1}{c-a} & \dfrac{c_2-a_2}{c-a} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(c-b)(c-a)} \begin{vmatrix} m & n & 1 \\ c_1-b_1 & c_2-b_2 & c-b \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c-a \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(c-b)(c-a)} \begin{vmatrix} m & n & 1 \\ a_1 - b_1 & a_2 - b_2 & a - b \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c - a \end{vmatrix}$$

şi având în vedere că din (41) deducem

$$a_1 - b_1 = m(a-b), \quad a_2 - b_2 = n(a-b),$$

determinantul Δ devine,

$$\Delta = \frac{a-b}{(c-b)(c-a)} \begin{vmatrix} m & n & 1 \\ m & n & 1 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c - a \end{vmatrix} \equiv 0,$$

ceeace dovedeşte că punctele T, R, S sunt colineare.

Demonstraţie analoagă, când ar coïncide oricare alte două din punctele M, N, R, S.

In baza acestei teoreme, şi a celor ştiute din urmă, putem formula în acest caz, următoarele concluzii:

Dacă două dintre punctele M, N, R, S coïncid într'un punct T, celelalte două fiind notate cu T_1, T_2, atunci *graficul reprezentat de sistemul (27) este:*

1°. *Un segment de dreaptă, dacă* T_1, T_2 *sunt la distanţă finită, segment având extremităţile în două din punctele* $T, T_1 T_2$, *cele mai îndepărtate;*

2°, *O semidreaptă cu extremitatea în* T, *dacă unul din punctele* T_1, T_2 *este la infinit, direcţia semidreptei precizându-se prin determinarea a încă unui punct, obţinut pentru o valoare oarecare particulară a lui* ω, *convenabilă, cum am mai văzut.*

3. *O dreaptă, dacă punctete* T_1, T_2 *sunt ambele la infinit, caz care nu prezintă importanţă.*

Relevăm însă, cazurile 1° şi 2°, care invederează, cum un sistem parametric de forma (27) poate reprezenta un segment de dreaptă, sau o semidreaptă.

Din cele expuse până aci, se desprinde următoarea metodă practică, pentru a hotărâ natura graficului reprezentat de sistemul parametric (27), metodă care nu necesită formarea ecuaţiilor dreptelor (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) de care ne-am servit şi nici nu avem nevoie a repeta toată argumentarea, care ne-a condus la concluziile din *A., B., C., D., E.*

In aplicaţii, procedăm numai în felul următor:

1°. *Calculăm întâi din sistemul (27), coordonatele punctelor M, N, R, S, care se obţin, respectiv, pentru* $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, *puncte care pot fi la distanţă finită, sau unele la infinit* şi ale căror coordonate sunt:

$$M\left(\frac{b_1 + c_1}{b + c}, \frac{b_2 + c_2}{b + c}\right), \quad N\left(\frac{a_1 + c_1}{a + c}, \frac{a_2 + c_2}{a + c}\right),$$

$$R\left(\frac{c_1 - b_1}{c - b}, \frac{c_2 - b_2}{c - b}\right), \quad S\left(\frac{c_1 - a_1}{c - a}, \frac{c_2 - a_2}{c - a}\right).$$

2°. *Aflăm apoi, dacă ecuaţia*

$$(42) \qquad a\,sp\,\omega + b\,cp\,\omega + c = 0,$$

are sau nu are rădăcini în cele patru cadrane şi care sunt în caz că există, utilizând pentru aceasta, concluziile din tabloul (T), partea I-a.

3° *Examinând poziţiile punctelor M, N, R, S şi faptul dacă ecuaţia (42) are, sau nu are rădăcini în unele din cadrane, putem hotărâ cu uşurinţă, care din cazurile A., B., C., D,, E., sunt satisfăcute şi în consecinţă care este natura graficului cerut, reprezentat de sistemul parametric* (27).

Aplicaţii.

Problema 1. *Se cere graficul reprezentat de sistemul parametric:*

$$(43) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{sp\,\omega + 3\,cp\,\omega + 1}{sp\,\omega + 2\,cp\,\omega + 3} \\ y = \dfrac{2\,sp\,\omega + cp\,\omega + 2}{sp\,\omega + 2\,cp\,\omega + 3}. \end{cases}$$

Soluţie. Pentru $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, în baza valorilor corespunzătoare pentru $sp\,\omega$, $cp\,\omega$ din tabloul de la *p.* 5 din „T. P", obţinem din sistemul dat, pe rând, coordonatele a patru puncte M, N, R, S, anume,

$$M\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \quad N\left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad R(-2, 1), \quad S(0, 0),$$

puncte, care sunt la distanţă finită şi distincte, pe care le figurăm într'un sistem de axe rectangulare $x\,O\,y$, (fig. 2).

De altă parte, ecuaţia

$$(44) \qquad sp\,\omega + 2\,cp\,\omega + 3 = 0,$$

comparată cu (2) din partea I-a, ne dă

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3.$$

Vedem aci că, β este în afara intervalelor

$$(1, \alpha), \quad (-1, \alpha),$$

deci conform celor arătate în partea I-a, n-rul trecut, p. 132, ecuația (44) n'are rădăcini în nici unul din cadrane.

Din aceste rezultate relativ la sistemul (43), constatăm că sunt împlinite condițiile din A., astfel că putem formula următorul răspuns corespunzător:

Graficul reprezentat de sistemul parametric (43), *este patrulaterul rectiliniu* M N R S (fig. 2).

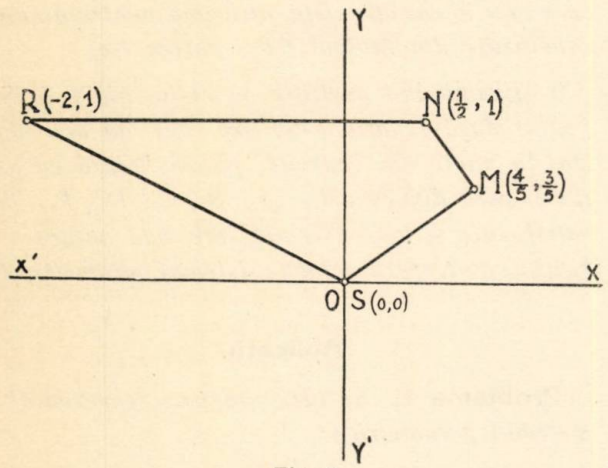


Fig. 2.

Observare. Un punct P (x, y), unde x, y sunt dați de sistemul (43), parcurge pe rând laturile acestui patrulater, în senzul M N R S, atunci când facem să varieze ω în mod continuu, în intervalul $(0, 2\pi)$, vârfurile obținându-se, pe rând, pentru $\omega = 0$, $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

Problema 2. *Se cere graficul reprezentat de sistemul parametric:*

$$(45) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{5\, sp\, \omega + 3\, cp\, \omega + 4}{sp\, \omega + 5\, cp\, \omega + 2} \\ y = \dfrac{2\, sp\, \omega - cp\, \omega + 4}{sp\, \omega + 5\, cp\, \omega + 2} \end{cases}.$$

Soluție. Pentru $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, obținem din sistemul parametric dat, pe rând, coordonatele a patru puncte M, N, R, S, anume

$$M\left(1\ \tfrac{3}{7}\right), \quad N(3, 2), \quad R\left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{5}{3}\right), \quad S(-1, 2),$$

puncte, care sunt la distanță finită și distincte, pe care le figurăm într'un sistem de axe rectangulare $x O y$ (fig. 3).

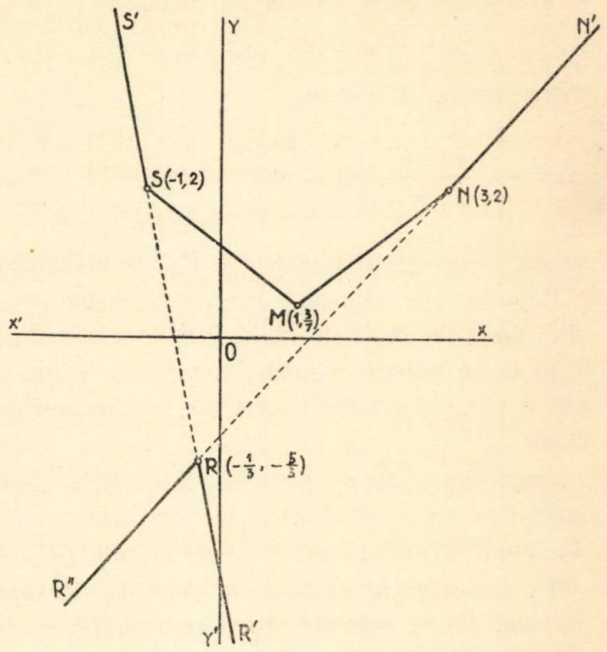


Fig. 3.

De altă parte, ecuația

$$(46) \qquad sp\, \omega + 5\, cp\, \omega + 2 = 0,$$

comparată cu (2) din partea I-a, ne dă

$$\alpha = 5, \qquad \beta = 2.$$

Vedem de aci că β este cuprins în intervalele

$$(-1, \alpha), \qquad (1, \alpha)$$

și conform condițiilor din tabloul (T), partea I-a, rezultă că ecuația (46) admite o rădăcină în cadranul al 2-lea și alta în cadranul al 3-lea.

Relevăm însă că, ecuația (46) este complect rezolvată, în partea I-a, p. 133, unde am găsit rădăcinele,

$$\omega_2 = 135^0, \qquad \omega_3 = 251^0,\ 33',\ 49'',$$

situate respectiv în cadranele al 2-lea și al 3-lea.

Din aceste rezultate relative la sistemul (45), constatăm că sunt împlinite condițiile din B., astfel că putem formula următorul răspuns corespunzător:

Graficul reprezentat de sistemul parametric (45), *este format din conturul liniar deschis M N N'*

$R''RR'S'SM$, obținut din patrulaterul $MNRS$, căruia i-am suprimat laturile NR și RS și le-am înlocuit respectiv prin semidreptele NN', $R''R$ și RR', $S'S$ de pe direcțiile lor.

Mai putem spune că, acest grafic este format din patrulaterul deschis $S'SMNN'$ și din unghiul $R''RR'$, (fig. 3).

Observare. Un punct $P(x, y)$, unde x, y sunt dați de sistemul (45), parcurge conturul de mai sus, când ω variază continuu în intervalul închis $(0, 2\pi)$, în felul următor:

Când ω variază în intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$, punctul $P(x, y)$ descrie segmentul MN; când ω variază în intervalele închise $(\frac{\pi}{2}, 135^0)$, $(135^0, \pi)$, punctul $P(x, y)$ parcurge respectiv semidreptele NN', $R''R$ situate în prelungirea segmentului NR, în ordinea scrisă; când ω variază în intervalele închise $(\pi, 251^0, 33', 49'')$, $(251^0, 33', 49'', \frac{3\pi}{2})$, punctul $P(x, y)$ descrie semidreptele RR', $S'S$ situate în prelungirea segmentului RS, în ordinea scrisă; în fine, când ω variază în intervalul închis $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, punctul $P(x, y)$ parcurge segmentul SM.

Ținem să relevăm acest grafic interesant, reprezentat de sistemul parametric (45).

Problema 3. *Se cere graficul reprezentat de sistemul parametric:*

$$(47)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{sp\,\omega + 2\,cp\,\omega + 3}{sp\,\omega + 3\,cp\,\omega - 3} \\ y = \dfrac{2\,sp\,\omega - cp\,\omega + 2}{sp\,\omega + 3\,cp\,\omega - 3}. \end{cases}$$

Soluție. Pentru $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, obținem din sistemul parametric dat, pe rând, coordonatele a patru puncte M, N, R, S, anume,

$$M(\pm\infty, \pm\infty), \qquad N(-2, -2),$$
$$R\left(-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{2}\right), \qquad S\left(-\tfrac{1}{2}, 0\right)$$

și figurăm într'un sistem de axe rectangulare xOy, mai întâi, punctele N, R, S, (fig. 4).

Dintre aceste puncte vedem că, M este la infinit, iar N, R, S sunt la distanță finită și distincte. In ce direcție se află la infinit punctul M?

Am putea conform teoriei expuse, să aflăm ecuația dreptei (D_1), care trece prin N și s'o construim, dar este suficient pentru a o avea, să aflăm un alt punct al ei, care să corespundă, de exemplu, la $\omega = 45^0$ $(0 \leq 45^0 \leq \frac{\pi}{2})$; acest punct P_{45^0} se află din (47) și este,

$$P_{45^0}\left(-\tfrac{9}{2}, -\tfrac{5}{2}\right),$$

pe care îl figurăm. Punctul M de la infinit este deci situat pe dreapta $P_{45^0}N$, de partea de care este P_{45^0}.

De altă parte, ecuația

$$sp\,\omega + 3\,cp\,\omega - 3 = 0,$$

are în intervalul închis $(0, 2\pi)$, rădăcinile $\omega = 0$, $\omega = 2\pi$, pentru care corespund punctele de la infinit M, S', situate respectiv pe semidreptele paralele MM', SS', fiindcă vârful M este aruncat la infinit.

Din aceste rezultate relative la sistemul (47), constatăm că sunt împlinite condițiile din *C.*, astfel că putem formula următorul răspuns corespunzător:

Graficul reprezentat de sistemul parametric (47), *este format din conturul liniar deschis $MNRSS'$, compus din semidreptele NM, SS' și din segmentele NR, RS* (fig. 4).

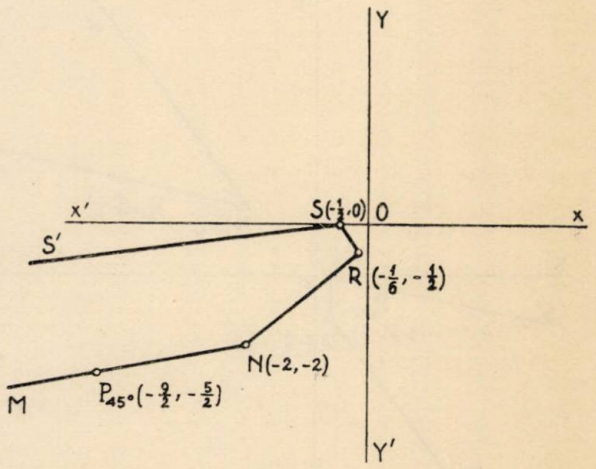


Fig. 4.

Observare. Un punct $P(x, y)$, unde x, y sunt dați de sistemul parametric (47), parcurge conturul liniar $MNRSS'$, când ω variază continuu în intervalul închis $(0, 2\pi)$, în felul următor; când ω variază în intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$, punctul $P(x, y)$ descrie

semidreapta M N; când ω variază în intervalul închis $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, punctul $P(x, y)$ parcurge segmentul N R; când ω variază în intervalul închis $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, punctul $P(x, y)$ descrie segmentul R S; în fine, când ω variază în intervalul închis $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, punctul $P(x, y)$ parcurge semidreapta S S'.

Problema 4. *Se cere graficul reprezentat de sistemul parametric:*

$$(48) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{sp\,\omega + 2\,cp\,\omega + 3}{3\,sp\,\omega + cp\,\omega - 1} \\ y = \dfrac{2\,sp\,\omega - cp\,\omega + 2}{3\,sp\,\omega + cp\,\omega - 1}. \end{cases}$$

Soluție. Pentru $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, obținem din sistemul parametric dat, pe rând, coordonatele a patru puncte M, N, R, S, anume,

$$M(\pm\infty, \pm\infty), \qquad N(2, 2),$$
$$R\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}\right), \qquad S\left(-\tfrac{1}{2}, 0\right)$$

și figurăm într'un sistem de axe rectangulare $x\,O\,y$, mai întâi, punctele, N, R, S (fig. 5).

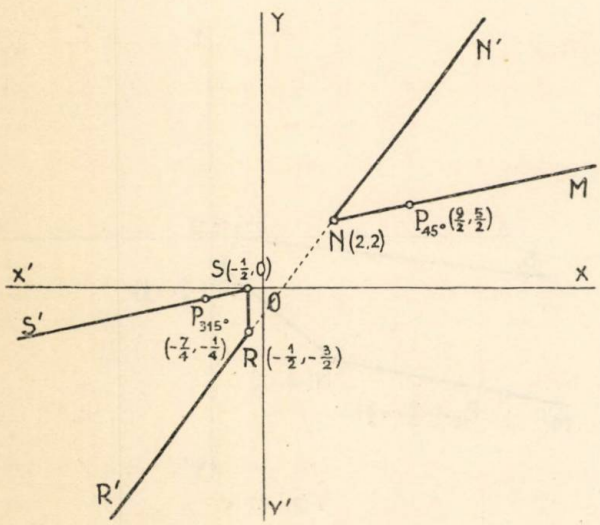


Fig. 5.

In ce direcție este la infinit punctul M?

Am putea conform teoriei expuse, să aflăm ecuațiile dreptelor (D_1), (D_4), care trec prin N și S și să le construim, dar este suficient pentru a le avea, ca să aflăm încă câte un alt punct al lor, care să corespundă, de exemplu, la $\omega = 45°$ și $\omega = 315°$ respectiv din intervalele $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ aceste puncte $P_{45°}$, $P_{315°}$ se află din (48) și sunt

$$P_{45°}\left(\tfrac{9}{2}, \tfrac{5}{2}\right), \qquad P_{315°}\left(-\tfrac{7}{4}, -\tfrac{1}{4}\right),$$

pe care le figurăm. Punctul M de la infinit este deci situat pe dreapta $P_{45°}$ N, de partea de care este $P_{45°}$ și apoi din cauza dublului semn a coordonatelor lui M, punctul M sare la infinit pe dreapta $S\,P_{315°}$, de partea lui $P_{315°}$ în S', M N, S S' fiind paralele.

De altă parte, ecuația

$$3\,sp\,\omega + cp\,\omega - 1 = 0,$$

are în afară de rădăcina $\omega = 0$, care face ca M să fie aruncat la infinit și rădăcina $\omega = 135°$ din cadranul al 2-lea.

Din aceste rezultate relative la sistemul (48), constatăm că sunt împlinite condițiile din D., cazul când segmentul R N trebuie înlocuit prin prelungirile sale, din cauza rădăcinei $\omega = 135°$, din cadranul al 2-lea, astfel că putem formula următorul răspuns corespunzător:

Graficul reprezentat de sistemul parametric (48), *este format din unghiul M N N' și conturul liniar deschis R' R S S'*, (fig. 5).

Observare. Un punct $P(x, y)$, unde x, y sunt dați de sistemul parametric (48), parcurge conturul descris, în felul următor: când ω variază în intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$, punctul $P(x, y)$ parcurge semidreapta M N; când ω variază în intervalele închise $(\frac{\pi}{2}, 135°)$, $(135°, \pi)$, punctul $P(x, y)$ parcurge respectiv semidreptele N N', R' R în ordinea scrisă; când ω variază în intervalul închis $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, punctul $P(x, y)$ descrie segmentul R S; în fine, când ω variază în intervalul închis $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, punctul $P(x, y)$ parcurge semidreapta S S'.

Problema 5. *Se cere graficul reprezentat de sistemul parametric:*

$$(49) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{sp\,\omega + 3\,cp\,\omega - 1}{cp\,\omega - sp\,\omega - 1} \\ y = \dfrac{3\,sp\,\omega - 2\,cp\,\omega - 1}{cp\,\omega - sp\,\omega - 1}. \end{cases}$$

Soluție. Pentru $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, obținem din sistemul parametric dat, pe rând, coordonatele a patru puncte M, N, R, S, anume,

$$M(\pm\infty, \pm\infty), \quad N(0, -1),$$
$$R(2, -\frac{1}{2}), \quad S(\pm\infty, \pm\infty)$$

și figurăm într'un sistem de axe rectangulare $x\,O\,y$, mai întâi, punctele N, R, (fig. 6).

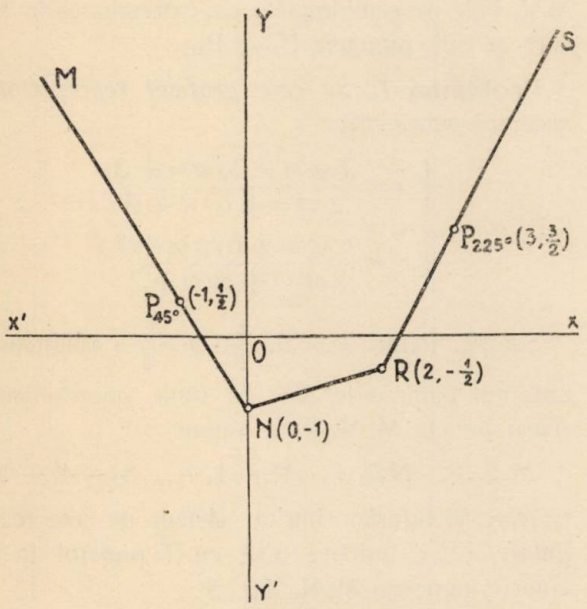


Fig. 6.

In ce direcție se află la infinit punctele M, S, circular consecutive?

Am putea, conform teoriei expuse, să aflăm ecuațiile dreptelor (D_1) și (D_3), care trec respectiv prin N și R și să le construim, dar este suficient pentru a avea aceste drepte, să aflăm încă câte un punct al lor, care să corespundă de exemplu la $\omega = 45°$ și $\omega = 225°$, respectiv din intervalele $(0, \frac{\pi}{2})$ și $(\pi, \frac{3\pi}{2})$; aceste puncte $P_{45°}$ și $P_{225°}$, se obțin din (49) și sunt

$$P_{45°}(-1, \frac{1}{2}), \quad P_{225°}(3, \frac{3}{2}),$$

pe care le figurăm și astfel punctul M se află la infinit pe dreapta $P_{45°}N$ de partea lui $P_{45°}$, iar S se află la infinit pe dreapta $R\,P_{225°}$ de partea lui $P_{225°}$, (fig. 6).

De altă parte observăm că, ecuația

$$cp\,\omega - sp\,\omega - 1 = 0$$

este verificată de orice valoare a lui ω din intervalul închis $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, în baza formulei fundamentale (IV) și mai are încă rădăcina $\omega = 0$, congruentă de altfel cu $\omega = 2\pi$.

Din aceste rezultate relative la sistemul (49), constatăm că sunt împlinite condițiile din *D.*, cazul 1°., adică când avem două puncte la infinit circular consecutive, astfel că putem formula următorul răspuns corespunzător.

Graficul reprezentat de sistemul parametric (49), este format din conturul liniar deschis M N R S, compus din semidreapta M N, segmentul N R, semidreapta R S și la care se adaogă punctele de la infinit ce se obțin pentru orice valoare ω cuprinsă în intervalul $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

Observare. Un punct $P(x, y)$, unde x, y sunt dați de sistemul parametric (49), parcurge conturul liniar deschis M N R S și punctele de la infinit menționate, în felul următor: când ω variază pe rând în intervalele $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, punctul $P(x, y)$ parcurge succesiv, semidreapta M N, segmentul N R, semidreapta R S și punctele de la infinit, în ordinea scrisă.

Problema 6. *Se cere graficul reprezentat de sistemul parametric:*

$$(50) \quad \begin{cases} x = \dfrac{sp\,\omega + 2\,cp\,\omega - 1}{sp\,\omega} \\ y = \dfrac{2\,sp\,\omega + cp\,\omega - 3}{sp\,\omega} \end{cases}.$$

Soluție. Pentru $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, obținem din sistemul parametric dat, pe rând, coordonatele a patru puncte M, N, R, S, anume

$$M(\pm\infty, \pm\infty), \; N(0, -1), \; R(\pm\infty, \pm\infty), \; S(2, 5)$$

și figurăm într'un sistem de axe rectangulare, mai întâi punctele N, S, (fig. 7).

In ce direcție se află la infinit punctele M, R, care nu sunt circular consecutive?

Am putea conform teoriei expuse, să aflăm ecua-

ţiile dreptelor (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) şi să le construim, dar este suficient pentru a avea aceste drepte, să aflăm încă câte un punct al lor, care să corespundă de exemplu la $\omega = 45^0$, $\omega = 135^0$, $\omega = 225^0$, $\omega = 315^0$, respectiv din intervalele $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$; aceste puncte P_{45^0}, P_{135^0}, P_{225^0}, P_{315^0} se obţin din (50) şi sunt

$P_{45^0}(1, -3)$, $P_{135^0}(-3, -5)$, $P_{225^0}(5, 9)$, $P_{315^0}(1, 7)$,

pe care le figurăm şi astfel punctele M, R ale căror coordonate au dublu semn, se află la infinit respectiv pe semidreptele $P_{45^0}N$, NP_{135^0} şi pe semidreptele cu extremitatea în S pe care se află punctele P_{225^0}, P_{315^0}.

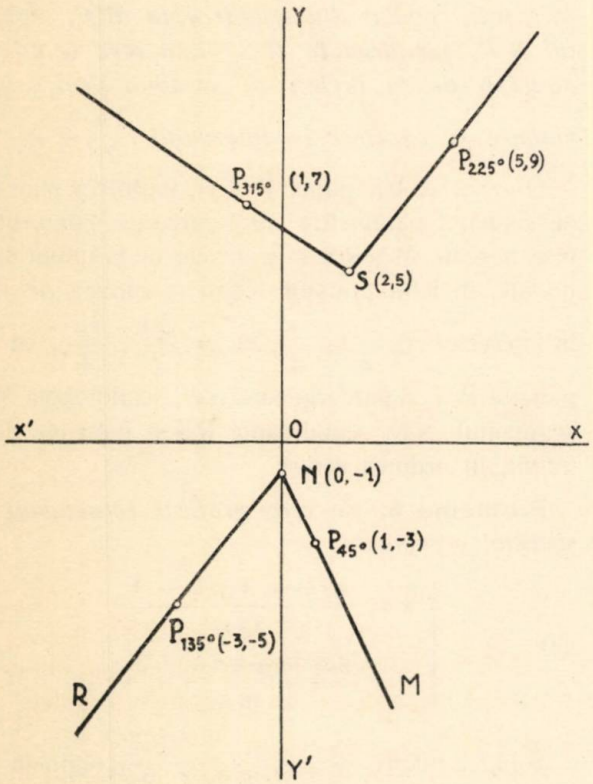


Fig. 7.

De altă parte ecuaţia,

$$sp\ \omega = 0,$$

este verificată numai de $\omega = 0$ şi $\omega = \pi$.

Din aceste rezultate relative la sistemul (50), constatăm că sunt împlinite condiţiile din D., cazul 2°., adică când avem două puncte la infinit circular neconsecutive, astfel că putem formula următorul răspuns corespunzător.

Graficul reprezentat de sistemul parametric (50), este format din conturul liniar, deschis, $M N R P_{225^0} S P_{315^0}$, compus din unghiurile $M N R$, $P_{225^0} S P_{315^0}$.

Observare. Un punct $P(x, y)$, unde x, y sunt daţi de sistemul parametric (50), parcurge conturul de mai sus, în felul următor: când ω variază pe rând în intervalele $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, punctul $P(x, y)$ parcurge succesiv semidreptele MN, NR, şi semidreptele cu extremitatea în S pe care se află punctele P_{225^0}, P_{315^0}.

Problema 7. *Se cere graficul reprezentat de sistemul parametric:*

$$(51) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{7\,sp\,\omega + 5\,cp\,\omega + 3}{2\,sp\,\omega + cp\,\omega + 3} \\ y = \dfrac{8\,sp\,\omega + 5\,cp\,\omega + 7}{2\,sp\,\omega + cp\,\omega + 3}. \end{cases}$$

Soluţie. Pentru $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, obţinem din sistemul parametric dat, pe rând, coordonatele a patru puncte M, N, R, S, anume

$$M(2, 3), \quad N(2, 3), \quad R(-1, 1), \quad S(-4, -1),$$

pe care le figurăm într'un sistem de axe rectangulare $x\,O\,y$, notând însă cu T punctul în care coïncid punctele M, N, (fig. 8).

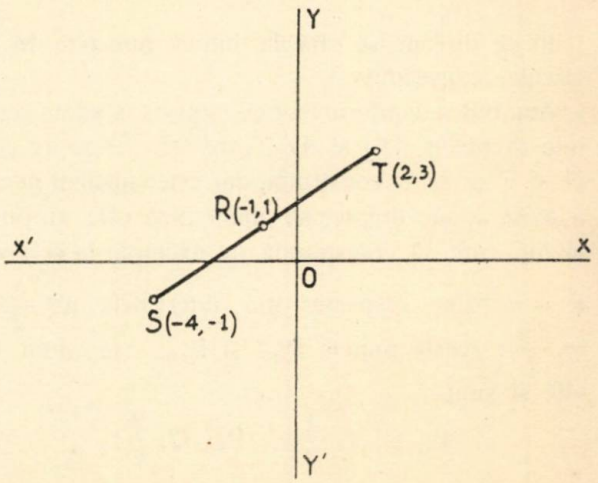


Fig. 8.

De altă parte, ecuaţia

$$(52) \qquad 2\,sp\,\omega + cp\,\omega + 3 = 0,$$

comparată cu (2), din partea I-a, ne dă,

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}$$

şi cum β nu este cuprins în intervalele $(-1, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$, urmează conform celor ştiute din partea I-a, că ecuaţia (52) n'are rădăcini în nici unul din cadrane.

Din aceste rezultate relative la sistemul (51), constatăm că sunt împlinite condiţiile *E.*, cazul 1°., adică când două puncte coïncid, iar celelalte două sunt la distanţă finită şi distincte, astfel că putem formula următorul răspuns corespunzător:

Graficul reprezentat de sistemul parametric (51), este format din segmentul T S, (fig. 8).

Observare. Un punct P (x, y), unde x, y sunt daţi de sistemul parametric (51), parcurge segmentul T S, în felul următor: când ω variază în intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$, punctul P (x, y) rămâne necontenit în T; când ω variază în intervalul închis $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, punctul P (x, y) descrie segmentul T R; când ω variază în intervalul închis $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, punctul P (x, y) parcurge segmentul R S; în fine, când ω variază în intervalul închis $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, punctul P (x, y) descrie segmentul S T.

E de observat că, punctul P (x, y) trece de două ori prin fiecare punct al segmentului T S, când ω variază continuu în intervalul închis $(0, 2\pi)$, că prin urmare, în două din intervalele $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, există câte o valoare a lui ω, pentru care sistemul (51) dă coordonatele unui aceluiaşi punct.

Problema 8. *Se cere graficul reprezentat de sistemul parametric:*

$$(53) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{cp\,\omega - 10\,sp\,\omega + 2}{cp\,\omega + 2\,sp\,\omega - 2} \\ y = \dfrac{2\,cp\,\omega - 14\,sp\,\omega + 2}{cp\,\omega + 2\,sp\,\omega - 2}. \end{cases}$$

Soluţie. Pentru $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, obţinem din sistemul parametric dat, pe rând, coordonatele a patru puncte M, N, R, S, anume,

$$M(-3, -4), \qquad N(\pm\infty, \pm\infty),$$
$$R(-\tfrac{1}{3}, 0), \qquad S(-3, -4),$$

şi figurăm într'un sistem de axe rectangulare $x\,O\,y$, mai întâi punctul T $(-3, -4)$, în care coïncid punctele M, S, precum şi punctul R, (fig. 9).

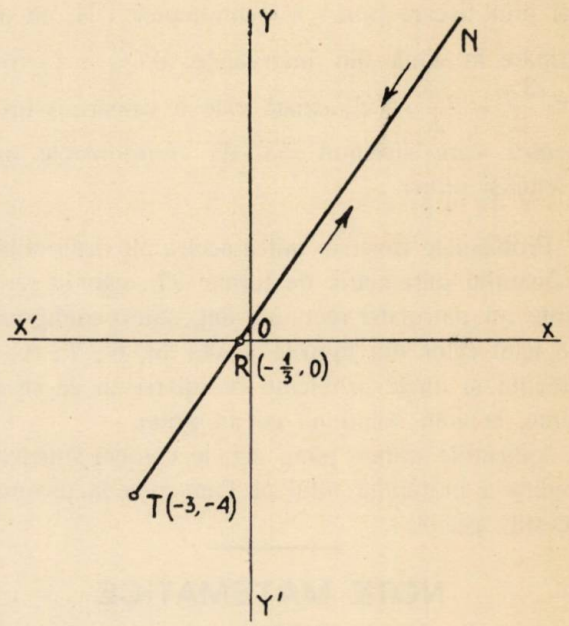


Fig. 9.

De altă parte ecuaţia,

$$cp\,\omega + 2\,sp\,\omega - 2 = 0,$$

admite numai rădăcina $\omega = \frac{\pi}{2}$, care aparţine de altfel primului şi celui de al 2-lea cadran.

Din aceste rezultate relative la sistemul (53), constatăm că sunt împlinite condiţiile din E., cazul 2°., adică când două puncte coïncid, iar unul din celelalte două este la infinit, astfel că putem formula următorul răspuns corespunzător.

Graficul reprezentat de sistemul parametric (53), *este format din semidreapta* T N (fig. 9).

Observare. Un punct P (x, y), unde x, y sunt daţi de sistemul parametric (53), parcurge semidreapta T N, în felul următor: când ω variază în intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$, punctul P (x, y) descrie semidreapta T N; când ω variază în intervalul închis $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, punctul P (x, y) descrie semidreapta

NR; când ω variază în intervalul închis $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, punctul P(x, y) parcurge segmentul RT; în fine, când ω variază în intervalul închis $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, punctul P(x, y) rămâne necontenit în T.

E de observat că, punctul P(x, y) trece de două ori prin fiecare punct al semidreptei TN, că prin urmare în două din intervalele $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, există câte o valoare a lui ω, pentru care sistemul (53) dă coordonatele unui aceluiaşi punct.

Problemele inverse, adică acelea ale determinării sistemului parametric de forma (27), care să reprezinte un patrulater rectiliniu dat, sau o configuraţie de felul celor din figurile 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9., precum şi unele probleme de intersecţii ce se pot pune, le vom soluţiona cu alt prilej.

Aplicaţiile tratate până aci, le credem suficiente, pentru a îndreptăţi titlul ce l'am pus la începutul acestui articol.

NOTE MATEMATICE

29. — *Quelques égalités multigrades déduites de l'identité multigrade,*

$$(13, 31, 47, 65, 67)^p = (15, 27, 51, 61, 69)^p$$
$$(p = 1, 3, 5, 7).$$

Théorème. L'égalité multigrade

$$(A_1, A_2 \ldots A_x)^p = (B_1, B_2, \ldots B_x)^p$$
$$(p = 1, 3, \ldots, 2n+1)$$

entraîne la suivante:

$$(A_1 - t, A_2 - t, \ldots A_x - t, A_1 + t, A_2 + t, \ldots A_x + t)^p =$$
$$(B_1 - t, B_2 - t, \ldots B_x - t, B_1 + t, B_2 + t, \ldots B_x + t)^p,$$
$$(p = 1, \ldots 2n+1).$$

Si t est arbitraire, la nouvelle égalité aura un nombre double de termes, mais en choisissant convenablement t, on réduit le nombre de termes.

En appliquant ce théorème à l'égalité multigrade figurant dans le titre, avec $t = 2$, nous trouvons:

$$(11, 15, 33, 45, 65, 69)^p = (13, 17, 25, 53, 59, 71)^p$$
$$p = 1, 3, 5, 7.$$

$$S_1 = 238, \quad S_3 = 734892, \quad S_5 = 2948905918,$$
$$S_7 = 12765059385862.$$

En appliquant à la nouvelle égalité le même théorème, avec $t = 1$, on aura, après suppression des termes égaux et du facteur commun 2,

$$(5, 16, 17, 22, 23, 32, 33, 34)^p =$$
$$(9, 12, 13, 26, 27, 29, 30, 36)^p, \quad (p = 1, 3, 5, 7).$$
$$S_1 = 182, \quad S_3 = 139.958, \quad S_5 = 132186762,$$
$$S_7 = 136078567078.$$

Remarquons que la somme S_1 est inférieure à la somme correspondante de l'égalité multigrade donnée (223). Cette égalité renferme 5 couples de nombres consecutifs et un triplet de nombres consécutifs.

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* Anul XLVI, Nr. 5. Ianuarie 1941. Algebra ornamentală (urmare şi sfârşit), de *I. Ionescu.* Aplicaţiuni ale calculului vectorial, de *D. V. Ionescu.* Asupra problemei 4385, de *Tiberiu Popoviciu.* O construcţie a centrelor de curbură la unele curbe plane, de Cpt. *Mihail I. Focşăneanu.* Extindere analitică a tangentei la o curbă, de *C. Ionescu-Bujor.* Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Boletin Matematico,* Anul XIII, No. 6, Mai 1940, Buenos-Aires. Asupra unei lucrări, de *B. I. Baidaff.* O teoremă asupra valorii medii, de *M. O. Gonzalez.* Probleme rezolvate şi propuse.

3. *Pozitiva,* Revistă de Matematici, Anul I, No. 5, Ianuarie 1941. Despre integrarea diferenţialelor totale exacte, de *M. Mănescu.* Complectări geometrice, de *Mihail I. Focşăneanu.* O categorie de locuri geometrice, de *V. Ghiţescu.* Note matematice, de *Eugen V. Dobrescu, P. Boldescu* şi *E. Arghiriade.* Probleme rezolvate şi propuse.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1799. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x^2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-1} = \frac{\pi}{4}.$$

MARIN F. VADUVA

Notând,

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x^2} = u, \quad \text{deci} \quad \operatorname{tg} u = \frac{1}{x^2},$$
$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-1} = v, \quad \text{deci} \quad \operatorname{tg} v = \frac{1}{x-1}, \tag{1}$$

ecuaţia dată devine,

$$u + v = \frac{\pi}{4},$$

sau

$$\operatorname{tg}(u+v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v} = 1.$$

Mai putem scri

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v = 1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v$$

şi înlocuind pe $\operatorname{tg} u$, $\operatorname{tg} v$ cu valorile lor din (1), obţinem:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1} = 1 - \frac{1}{x^2(x-1)}. \quad (2)$$

Aducând la forma întreagă, obţinem ecuaţia

$$x - 1 + x^2 = x^2(x-1) - 1,$$

sau

$$x^3 - 2x^2 - x = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1 + \sqrt{2}, \quad x_3 = 1 - \sqrt{2}.$$

Acestea sunt rădăcinele ecuaţiei propuse.

Observare. Pentru corespondenţii cu mai mult exerciţiu, s'ar fi putut trece direct de la ecuaţia dată la ecuaţia (2), luând tangenta în ambii membrii.

Soluţii bune date de d-na *Abramescu-Pop Mariana* şi de d-nii: *Bakonyi C.* (lic. Loga, Timişoara), *Bârlea V. Suhăţeanu* (Colegiul Militar, N. Filipescu), *Brădeanu Nicolae* (lic. Beiuş), *Damianof Ştefan* (lic. Român Sofia), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Goga Florian*, *Logăfătu M. Ioan* (lic. Beiuş). *Luca I Ioan* (lic. Arad), *Maior Gheorghe* (student), *Nicola Gheorghe* (lic. Român, Sofia), *Peltechi M.* (lic. Român, Sofia), *Popescu Corneliu* (Giurgiu), *Popovici Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Şimon S Petru* (lic. Arad), *Teodorescu Marin*, *Tilica C. Ştefan* (Şc. Of. de Geniu), *Venter D-tru*, *Vijelie Gh. Eugen* (lic Milit., N. Filipescu) şi *Vostinariu Gheorghe*.

PROBLEME PROPUSE

1914. — Să se arate că expresia,

$$E = 16^{2n+1} \times 3^{8n+4} + 7^{6n+3} \times 125^{2n+1},$$

este divizibilă prin 44171.

IONEL I. STAMATE

1915. — Să se demonstreze că dacă,

$$u_n = \operatorname{Log} \cdot \frac{(n+a)(n+b)}{(n+a+1)(n+b+1)},$$

atunci suma,

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \operatorname{Log}.(n+a+1)(n+b+1),$$

este constantă, oricare ar fi n.

G-L GH. BUICLIU

1916. — Presupunând $a \neq b$, să se discute sistemul:

$$\begin{cases} ax + y + z = b \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = 1. \end{cases}$$

CORNELIA NANES

1917. — Fie AD şi CP respectiv înălţimea şi bisectoarea în triunghiul dreptunghic BAC. Din punctul P se duce o paralelă la AC, care întâlneşte în R ipotenuza BC. Să se arate că:

$$\overline{AF} = \overline{BP}$$

$$\overline{AF}^2 = \overline{PF} \cdot \overline{BR}.$$

LT. G P. BOERESCU

1918. — Să se rezolve sistemul:

$$\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} + 3\,\frac{\cos 2y - \cos 2x}{\sin 2x - \sin 2y} = 2$$

$$2\,\frac{\cos x - \cos y}{\sin x + \sin y} - \frac{\cos 2y + \cos 2x}{\sin 2x + \sin 2y} = 9.$$

MIHAIL BOTEZ

1919. — Să se demonstreze că, într'un triunghiu oarecare, avem relaţia:

$$sp\frac{A}{2} + cp\frac{B}{2} + cp\frac{C}{2} =$$

$$2\,sp\frac{A}{2}\left(cp\frac{B}{2} + cp\frac{C}{2} - cp\frac{B}{2}\,cp\frac{C}{2}\right) + 1,$$

$sp\,\alpha$ şi $cp\,\alpha$ însemnând respectiv, sinusul şi cosinusul patratic de α.

A. GLODEN

1920. — Să se rezolve cu ajutorul „*Trigonometriei patratice*", următoarea problemă de navigaţie costieră:

O corabie merge în drum Nord. La un moment dat relevează un far sub unghiul α. (unghiul format între axul navei şi direcţia la far).

După ce nava a parcurs 8 mile relevmentul este 3α, iar după încă 2 mile relevmentul este 5α.

Se cere distanţa la travers. (lungimea perpendicularei scoborâtă din far pe drumul navei).

CPT. C COSTACHESCU

1921. — Se cere graficul reprezentat de sistemul parametric:

$$x = \frac{2\,sp\,\omega + 2\,cp\,\omega + 1}{2\,sp\,\omega - 4\,cp\,\omega + 1}$$

$$y = \frac{sp\,\omega - 3\,cp\,\omega + 3}{2\,sp\,\omega - 4\,cp\,\omega + 1}.$$

V. ALACI

Erată. Problema notată sub numărul 1940, este de fapt prob'ema 1840.

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE.

a) Algebra.

		Pag.
E. Vişa	Funcţiuni pseudo-hiperbolice. Studiu elementar 8, 19, 48, 61, 69	
E. Vişa	Asupra însumării progresiilor aritmetico-geometrice . . .	117

b) Geometrie.

O. N. Ţino	Teoreme de geometrie consecinţe ale aplicaţiunilor trigonometriei patratice	3
D. V. Ionescu	Asupra unei proprietăţi a Domnului profesor *V. Alaci* . .	17
O. N. Ţino	Triunghiuri isocline circumscrise unui triunghiu dat . .	29
O. N. Ţino	O clasă interesantă de trapeze	45, 57
M. V. Thébault	Octogone bordé de carrés .	81
M. Botez	Relaţiuni într'un poligon regulat	105

c) Geometrie analitică.

V. Alaci	Un nou capitol de „Geometrie analitică". Sisteme parametrice care reprezintă patrulatere rectilinii şi invers . . .	129, 141

d) Trigonometrie.

M. Grumăzescu	Asupra unui triunghiu . . .	94

e) Analiză matematică.

M. Botez	Teoreme în legătură cu curbele rezultante	93
C. Borş	Curbe armonice	107
V. Claudian	Asupra unei probleme de Analiză	118

II. REDACŢIONALE.

* * *	Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara	1, 2

III. NOTE MATEMATICE.

a) Aritmetica şi Teoria Numerelor.

6.[1] A. Gloden	Quelques carrés magiques d'un genre particulier	36
15. A. Gloden	Sur la formation des carrés semimagiques à produits . .	83
20. Gh. Buicliu	Asupra problemei 1760 . . .	109
22. Gh. Buicliu	Problema 1753	120
26. Gh. Buicliu	Soluţia generală a problemei 1768.	135

b) Algebra.

1. A. Gloden	Sur un procédé donnant une infinité de relations entre bicarrés à partir de relations triviales entre bicarrés	12
3. A. Gloden	Une solution à deux paramètres de l'équation $x^3+y^3+z^3-3xyz=u^3$	23
4. E. Vişa	Asupra coordonatelor hiperbolice	23
8. A. Gloden	Questions d'analyse indéterminée	51
10. A. Gloden	Resolution en nombres entiers du système: $x^2+axy+y^2=z^2+azt+t^2=w^2$, a étant un nombre donné	63
11. O. A. Enulescu	Rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei $\sum X_i^2=X^2$ $(i=1, 2,\ldots, n)$	64
12. A. Gloden	Des égalités multigrades, vraies aux degrés 2 et 4 à partir de systémes de nombres donnés par *Diophante* et *Fermat* . .	72
17. A. Gloden	Une solution à deux paramètres du système diophantien $x^3+y^2=z^2$, $x+y=t^2$	98
18. O. A. Enulescu	Rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei $\sum_{i=1}^{n} X_i^2=U^2+V^2$ . .	99
19. A. Gloden	Quelques chaînes multigrades	108
21. A. Moessner	Das Gleichungssystem: $2(a^v+b^v)=x+y+z+w$; $2(a^{2v}+b^{2v})=x^2+y^2+z^2+w^2$; $2(a^{3v}+b^{3v})=x^3+y^3+z^3+w^3$;	110
23. A. Gloden	Résolution en nombres entiers de quelques systémes diophantiens	120
25. I. I. Stamate	Asupra problemei 1738 . . .	122
27. A. Gloden	Problème diophantien . . .	135
29. A. Gloden	Quelques égalités multigrades déduites de l'identité multigrade $(13, 31, 47, 65, 67)^p=(15, 27, 51, 61, 69)^p$ $(p=1, 3, 5\ 7)$.	156

c) Geometrie.

5. Mariana Abramescu	Asupra transformării prin polare reciproce	23

d) Trigonometrie.

2. M. St. Botez	Relaţiuni între funcţiuni patratice şi circulare	13
13. V. Andronache	O metodă pentru stabilirea unor identităţi trigonometrice . .	73
24. I. Th. Popovici	Asupra triunghiurilor în care avem: $a=\frac{b^2+bc+c^2}{b+c}$ . .	121

e) Geometrie analitică.

7. M. St. Botez	O transformare punctuală birapţională	36
9. Gh. Buicliu	O transformare punctuală birapţională	51
14. E. Vişa	O simplă observaţie în legătură cu unele configuraţii geometrice reprezentate parametric	74
16. St. Musta	Asupra paralelogramelor circumscrise unei elipse . . .	84
28. C. Borş	Asupra rnei clase de transformări particulare $(\overline{OA}, \varphi)$ . .	136

[1]) In această coloană sunt înscrise numerele de ordine ale notelor.

IV. BIBLIOGRAFIE.

		Pag.
N. Abramescu	Nouvelle méthode pour obtenir la cubique qui donne les tangentes de *Darboux* en un point d'une surface	25
N. Abramescu	Nouvelles propriétés de la quartique piriforme déduite comme le lieu du centre instantané de mouvement d'une figure plane variable avec conservation de similitude	25
N. Abramescu	L'apolarité d'une forme binaire et d'une form cubique Application à la théorie des surfaces	25
N. Abramescu	Complectări de geometrie elementară	25
N. Abramescu	Expunere de titluri, activitate didactică şi ştiinţifică . . .	123
Th. Angheluţă	Curs de Algebră superioară Funcţii analitice	13
Th. Angheluţă	Sur une propriété des polynomes	25
Th. Angheluţă	Sur une limite pour les modules des zéros des polynomes .	8
Annalles scientifique	de l'Université de Iassy . .	24
Boletin Matematico	. . . . . 25, 39, 52, 65,	156
M. St. Botez	Metode de rezolvare a ecuaţiilor trigonometrice	39
M. St. Botez	Sur le problème de la projection bicentrale dans un espace à quatre dimensions . . .	112
M St. Botez	Asupra polinomului lui *Abel*	112
M. St. Botez	Asupra unor sume trigonometrice	112
Buletinul Facultăţii de Agronomie	din Cluj, v VIII	39
Bulletin de Mathématique et de Physique	pures et appliquées, de l'École Polytechnique Roi Carol II	65
Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique	de Timişoara	65
Florica M. Caracudovici	Aplicaţii geometrice ale calculului vectorial	66
V. G. Cavallaro	Richerche sulle Sezioni dei Diedri	25
V G. Cavallaro	La Trigonometria quadratica .	25
I. Curea	Bulletin séismique	52
I. Curea	Staţiunea seismică a Observatorului astronomic din Cluj .	75
Disquisitions Mathematice et Physicae	. . . . .	75
N. Gavrilian	Curs sistematic şi metodic de Aritmetică practică . . .	39
Gazeta Matematică	13, 24, 39, 51, 61, 74, 87, 100,	112, 123, 137, 156
Gh. Th. Gheorghiu	Sur les surfaces de *Tzitzeica* .	39
Gh. Th. Gheorghiu	Probleme de Analiză Matematică 39,	112
M. Ghermănescu	Une inégalité pour les algebroïdes	13
A. G. Ioachimescu	Coleccion de Problemas de Algebra	25
D. Mardan	O activitate technică şi socială exprimată prin cifre . . .	137
Mathematica	. . . . .	51
I. G. Murgulescu şi E. Laţiu	Direkte Konduktometrische Methoden	100
N. M.	Raportul anarmonic	13
N. M.	Transformarea prin polare reciproce	123
V. Novac	Evoluţia concepţiei despre lumină	13
M. Picone	Nuovi metodi d'indagine per la teoria delle equazioni lineari a derivate parziali	66
M. Picone	Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fizica Matematica	66
Pitagora	. . . . . 13, 25, 39,	65
I .I Popa	Profesorul *Gheorghe Ţiţeica* .	52
I. I. Popa	A la recherche d'un manuscrit perdu	52
I. I. Popa	Elementele lui *Euclid*	52
I. I. Popa	Matematica în ultimul pătrar de veac la Universitatea din Iaşi	52
I. I. Popa	Un ieşau uitat: *Dimitrie Asachi*	
I. I. Popa	Douăzeci şi cinci de ani de activitate a Seminariului Matematic din Iaşi	52
I. I. Popa	Géométrie centro-affine des courbes gauches	52
I. I. Popa	Géométrie projective différentielle du point conique des surfaces	52
I. I. Popa	Sur la transformation asymtotique des courbes gauches .	52
I. I. Popa	Sur quelques singularités des courbes planes	52
I. I. Popa	Sulle „transformate asintotique" delle curbe sghembe . . .	52
I. I. Popa	Sur les suites de *Laplace* périodiques	52
I. I. Popa	Geometria proiettivo-differenziale delle singolarita delle curve piane	52
I. I. Popa	Geometria proiettivo-diffe enziale selle singolaritä Il punto di flesso di una superficie qualunque , ...	52
I. I. Popa	Contributo allo studio proiettivo-differenziale delle singolarità. Punto di flesso e punto parabolico delle superficie . .	52
I. I. Popa	Remarques sur le faisceau de *M. Gambier*	52
I. I. Popa	Sulla geometria projettivo-differenziale delle famiglie di superficie	52
I. I. Popa	Le modéle d'un ancien traité roumain d'arithmétique . .	52
I. I. Popa	Osservazioni sopra la linea parabolica di una superficie . .	52
I. I. Popa	Sugli osculanti di una curva .	52
I. I. Popa	Titluri şi lucrări	52
Pozitiva	. . . . 100, 112, 123, 137,	156
N. Praporgescu	Sur une classe d'équations intégrales et leur applications à la statistique	100
F. Pretti	La funzione „Valore assoluto" în Geometria Proiettiva . .	25
Revu mathématique	de l'Union Interbalcanique . .	87
M. Şerban	Introducere la Studiul „Agronomiei ociale"	75
M. Şerban	Ţările agrare extensive şi potenţialul de afirmare a intereselor naţionale	75
C. Severineanu şi Şt. Nadaşan	Contribuţii la studiul ruperei osiilor de automotor	100
C. Stăncescu	Aluminiul în industrie şi aviaţie	100

		Pag.
E. Stern	General formules for the number of magic squares belonging to certain clases . . .	13
Știință și progres	. . . . .	25, 65
V. Thébault	Rectangles semblables associés à un triangle	39
L. Toscano	Sul prodotto di due polinomi di *Laguerre* e di *Hermite* .	66
L. Toscano	Relazioni trai polinomi di *Laguerre* e di *Hermite* . . .	123
I. Vlădescu	Phosphor im Gusseisen . . .	66

V. CHESTIUNI DE EXAMEN.

Examenul de admitere în an. I la Școala Politechnică din Timisoara 111

VI. DIVERSE INFORMAȚIUNI.

Acordarea premiului din fondul creiat la R. M. T. pe seama unui elev al liceului „Ion Maiorescu" din Giurgiu, publicat la pag. 100, anul XVII, Nr. 9 în R. M. T. 25

VII. ERATA.

La articolul „Funcțiuni pseudo-hiperbolice" . . . 44, 80
Numele autorului problemei Nr. 1860 80
Numele autorului notei Nr. 16 104
Problema 1824 se republică fiind greșit publicată la pag. 169, Nr. 12, an XIX 16
Problema notată sub numărul 1910, este de fapt problema 1840. 157

VIII. PROBLEME PROPUSE ȘI REZOLVATE.

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă și cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul XX. Problemelor care nu au nimic în coloana 4), nu li s'a publicat încă soluția.

1).	2).	3).	4).
50	110	I	
69	142	„	
92	187	„	
98	187	„	
100	14	II	
110	14	„	
121	30	„	
124	46	„	
140	62	„	
141	62	„	
164	94	„	
175	110	„	
178	126	„	
185	126	„	
191	142	„	
194	142	„	
206	174	„	
217	185	„	
230	14	III	
235	30	„	
244	46	„	
255	62	„	
259	62	„	
268	78	„	
275	94	„	
289	126	„	112
291	126	„	
296	142	„	123
313	174	„	66
315	174	„	137
317	174	„	
344	30	IV	
345	30	„	
347	46	„	
357	62	„	
359	62	„	
361	78	„	100
369	94	IV	40
376	94	„	
382	110	„	
390	126	„	
393	126	„	
406	158	„	87
407	158	„	
411	158	„	
414	174	„	
418	174	„	
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V	
440	30	„	
444	30	„	13
450	46	„	
458	62	„	
478	94	„	
479	94	„	
489	126	„	75
516	174	„	
519	190	„	
524	190	„	
535	30	VI	
542	46	„	52
543	46	„	25
548	46	„	
550	62	„	
557	78	„	
562	78	„	
569	94	„	
606	174	„	
608	174	„	
612	190	„	
613	190	„	
616	190	„	
622	22	VII	
634	54	„	
635	54	„	
649	86	„	
654	102	„	
656	102	„	
658	102	„	
686	134	„	
695	190	„	
762	126	VIII	
766	126	„	
769	142	„	
772	142	„	
782	174	„	
794	190	„	
851	96	IX	
858	108	„	
860	108	IX	
867	122	„	
879	144	„	
908	36	X	
924	60	„	
938	84	„	
939	84	„	
954	108	„	
961	120	„	
971	132	„	
971 bis	132	„	
979	138	„	
982	12	XI	
984	12	„	
992	24	„	
993	24	„	
1000	36	„	
1001	36	„	
1002	36	„	
1008	48	„	
1012	48	„	
1017	60	„	
1018	60	„	
1027	72	„	
1035	84	„	
1036	84	„	
1037	84	„	
1043	96	„	
1044	96	„	
1060	120	„	
1067	132	„	
1068	132	„	
1077	138	„	
1085	12	XII	
1093	24	„	
1107	48	„	
1108	48	„	
1115	60	„	
1116	60	„	
1119	60	„	
1125	72	„	
1126	72	„	
1129	84	„	
1133	84	„	
1134	84	„	
1140	96	„	
1142	96	„	
1146	108	„	
1149	108	„	
1156	120	„	
1157	120	„	
1158	120	„	
1160	120	„	
1161	132	„	

1).	2).	3).	4).
1163	132	XII	
1166	132	„	
1167	132	„	
1173	138	„	
1174	138	„	
1182	12	XIII	
1183	12	„	
1187	24	„	
1188	24	„	
1195	36	„	
1198	36	„	
1205	48	„	
1206	48	„	
1212	60	„	
1213	60	„	
1216	60	„	
1218	72	„	
1219	72	„	
1220	72	„	
1223	72	„	
1224	72	„	
1225	84	„	
1228	84	„	
1229	84	„	
1231	84	„	
1234	96	„	
1236	96	„	
1241	108	„	
1243	108	„	
1245	108	„	
1248	120	„	
1250	120	„	
1253	120	„	
1258	132	„	
1262	132	„	
1268	141	„	
1270	141	„	
1272	12	XIV	
1275	12	„	
1280	24	„	
1289	36	„	
1295	36	„	
1299	52	„	
1300	52	„	
1306	64	„	
1307	64	„	
1308	64	„	
1309	64	„	
1311	64	„	
1315	76	„	
1319	76	„	
1322	88	„	
1323	88	„	
1325	88	„	

1).	2).	3).	4)
1327	88	XIV	
1331	100	„	
1333	100	„	
1341	112	„	
1349	124	„	
1350	124	„	
1351	124	„	
1354	136	„	
1357	136	„	
1363	148	„	
1364	148	„	
1365	148	„	
1370	12	XV	
1377	24	„	
1378	24	„	
1379	24	„	
1380	24	„	
1385	36	„	
1386	36	„	
1389	36	„	
1390	36	„	
1391	36	„	
1393	48	„	
1395	48	„	
1396	48	„	
1402	60	„	
1405	60	„	
1407	60	„	
1413	72	„	
1414	72	„	
1419	84	„	
1422	84	„	
1423	84	„	
1427	96	„	
1428	96	„	
1430	96	„	
1436	108	„	
1438	108	„	
1442	120	„	
1443	120	„	
1446	120	„	
1447	120	„	
1450	132	„	
1454	132	„	
1460	144	„	
1461	144	„	
1472	28	XVI	
1474	28	„	
1475	28	„	
1478	28	„	
1482	40	„	
1483	40	„	
1485	40	„	
	36	XVIII	

1).	2).	3).	4).
1486	40	XVI	
1489	52	„	
1490	52	„	
1492	52	„	
1493	52	„	
1494	52	„	
1496	52	„	
1498	64	„	
1501	64	„	
1507	76	„	
1511	76	„	
1514	88	„	
1516	88	„	
1530	112	„	
1531	112	„	
1532	112	„	
1534	112	„	
1536	112	„	
1542	124	„	
1543	124	„	
1545	124	„	
1547	136	„	
1548	136	„	
1553	136	„	
1554	147	„	
1555	147	„	
1557	148	„	
1558	148	„	
1559	148	„	
1560	148	„	
1561	148	„	
1563	12	XVII	
1564	12	„	
1566	12	„	
1568	12	„	
1571	24	„	
1574	24	„	
1575	24	„	
1577	24	„	
1581	36	„	
1582	36	„	
1583	36	„	
1586	48	„	
1588	48	„	
1589	48	„	
1590	48	„	124
1594	60	„	
1595	60	„	
1596	60	„	88
1600	60	„	
1602	72	„	
1604	72	„	
1605	72	„	
1607	72	„	

1).	2)	3).	4)
1609	72	XVII	
1610	84	„	
1112	84	„	
1613	84	„	
1614	84	„	
1615	84	„	
1617	84	„	125
1618	96	„	
1621	96	„	
1622	96	„	
1624	96	„	
1626	108	.	
1627	108	„	
1628	108	„	
1629	108	„	
1630	108	„	
1631	108	„	
1632	108	„	
1633	120	„	
1634	120	„	
1636	120	„	
1637	120	„	
1639	120	„	75
1640	120	„	
1641	132	„	
1642	132	„	
1643	132	„	
1644	132	„	
1645	132	„	
1646	132	„	
1880	92	XX	
1647	132	XVII	
1648	132	„	
1651	144	„	
1652	144	„	
1653	144	„	
1654	144	„	
1655	144	„	89
1656	144	„	
1658	12	XVIII	
1659	12	„	
1660	12	„	
1661	12	„	
1662	12	„	
1664	12	„	
1665	12	„	
1666	24	„	
1667	24	„	
1668	24	„	
1669	24	„	
1670	24	„	
1671	24	„	
1672	24	„	
1674	36	„	

1).	2).	3).	4).
1675	36	XVIII	
1676	36	„	
1677	36	„	89
1678	36	„	
1679	36	„	
1680	36	„	
1681	48	„	
1682	48	„	
1683	48	„	76
1684	48	„	77
1685	48	„	
1686	48	„	
1687	48	„	
1688	48	„	
1689	60	„	
1690	60	„	
1691	60	„	
1692	60	„	
1693	60	„	
1694	60	„	
1695	60	„	
1696	60	„	
1697	72	„	
1698	72	„	
1699	72	„	14
1700	72	„	14
1701	72	„	
1702	72	„	77
1703	72	„	15
1704	84	„	26
1705	84	„	53
1706	84	„	
1707	84	„	26
1708	84	„	
1709	84	„	
1710	84	„	
1711	84	„	
1712	96	„	27
1713	96	„	41
1714	96	„	
1715	96	„	
1716	96	„	
1717	96	„	
1718	96	„	
1719	96	„	
1720	108	„	41
1721	108	„	54
1722	108	„	
1723	108	„	
1724	108	„	
1725	108 / 120	„	
1726	108	„	
1727	108	„	27

1).	2).	3).	4).
1728	120	XVIII	
1729	120	„	42
1730	120	„	54
1731	120	„	138
1732	120	„	
1733	120	„	
1734	120	„	43
1735	120	„	43
1736	132	„	66
1737	132	„	
1738	132	„	66
1739	132	„	
1740	132	„	
1741	132	„	
1742	132	„	
1743	132	„	54
1744	149	„	
1745	149	„	67
1746	149	„	67
1747	149	„	
1749	149	„	
1750	149	„	
1751	149	„	90
1752	16	XIX	113
1753	16	XX / XIX	55 / 113
1754	16	„	
1755	16	„	
1756 / 1821	16 / 156	„	
1757	16	„	101
1758	16	„	
1759	16	„	
1760	27	„	101
1761	28	„	102
1762	28	„	
1763	28	„	
1764	28	„	
1765	28	„	102
1767 / 1865	28 / 68	„ / XX	
1768	40	XIX	113
1769	40	„	
1770	40	„	
1771	40	„	
1772	40	„	
1773	40	„	
1774	40	„	103
1775	40	„	90
1776	56	„	
1777	56	„	
1778	56	„	103
1779	56	„	114
1780	56	„	
1781	56	„	

1).	2).	3).	4).
1782	56	XIX	
1783	56	„	115
1784	80	„	
1785	80	„	125
1786	80	„	115
1787	80	„	126
1788	80	„	
1789	80	„	
1790	80	„	
1792	124	„	
1793	124	„	
1794 / 1845	124 / 44	„ / XX	127
1795	124	XIX	
1796	124	„	
1797	124	„	
1798	124	„	
1799	124	„	156
1800	124	„	
1802	136	„	
1803	136	„	
1804	136	„	
1805	136	„	
1806	136	„	
1807	136	„	127
1808	136	„	
1809	156	„	
1810	156	„	
1811	156	„	
1812	156	„	
1813	156	„	
1814	156	„	
1815	156	„	
1816	156	„	
1817	169	„	
1818	169	„	
1819	169	„	
1820	169	„	
1822	169	„	
1823	169	„	
1824	169 / 16	„ / XX	
1825	169	XIX	
1826	16	XX	
1827	16	„	
1828	16	„	
1829	16	„	
1830	16	„	
1831	16	„	
1832	28	„	
1833	28	„	
1834	28	„	
1835	28	„	

1).	2).	3).	4)
1836	28	XX	
1837	28	„	
1838	28	„	
1839	28	„	
1840	28	„	
1841	28	„	
1842	44	„	
1843	44	„	
1844	44	„	
1845 / 1794	44 / 124	„ / XIX	127
1846	44	XX	
1847	44	„	
1848	44	„	
1849	44	„	
1850	56	„	
1851	56	„	
1852	56	„	
1853	56	„	
1854	56	„	
1855	56	„	
1856	56	„	
1857	56	„	
1858	68	„	
1859	68	„	
1860	68	„	
1861	68	„	
1862	68	„	
1863	68	„	
1864	68	„	78
1865 / 1767	68 / 28	„ / XIX	
1866	80	XX	
1867	80	„	
1868	80	„	
1869	80	„	
1870	80	„	
1871	80	„	
1872	80	„	
1873	80	„	
1874	92	„	
1875	92	„	
1876	92	„	
1877	92	„	
1878	92	„	
1879	92	„	
1880 / 1646	92 / 132	„ / XVII	
1881	92	XX	
1882	104	„	
1883	104	„	
1884	104	„	
1885	104	„	

1).	2).	3).	4).
1886	104	XX	
1887	104	„	
1888	104	„	
1889	104	„	
1890	116	„	
1891	116	„	
1892	116	„	
1893	116	„	
1894	116	„	

1)	2).	3).	4)
1895	116	XX	
1896	116	„	
1897	116	„	
1898	128	„	
1899	128	„	
1900	128	„	
1901	128	„	
1902	128	„	
1903	128	„	

1).	2).	3).	4).
1904	128	XX	
1905	128	„	
1906	140	„	
1907	140	„	
1908	140	„	
1909	140	„	
1910	140	„	
1911	140	„	
1912	140	„	

1).	2).	3)	4).
1913	140	XX	
1914	157	„	
1915	157	„	
1916	157	„	
1917	157	„	
1918	157	„	
1919	157	„	
1920	157	„	
1921	157	„	

TABLOUL NUMELOR[1]

Abason E., 1, 66
Abramescu N., 1, 23, 25, 100, 112, 123.
Abramescu -Pop Mariana, 24, 101, 102, 103, 115, 127, 157.
Adam D. R., 1.
Adamescu M., 1.
Agapescu M N., 112.
Akerman C., 41.
Alaci V., 1, 3, 7, 8, 9, 15, 16, 17, 18, 19, 28, 29, 43, 44, 45, 55, 56, 57, 63, 65, 68, 69, 74, 78, 80, 81, 90, 92, 93, 104, 105, 112, 116, 117, 125, 128, 129, 136, 140, 141, 157.
Almăjan P., 1.
Almăjan P. P., 68.
Aman V C., 16, 85.
Amenta A., 39.
Anastasiade I., 1.
Anastasiu M. D., 26.
Andrievici N., 14, 101, 104, 116, 125.
Andronache V, 74.
Andronescu P., 1.
Angheluță Th., 1, 13, 25, 51, 52, 65.
Aniţescu N. N., 14, 15, 26, 41, 76, 77, 125.
Anton G., 26, 76.
Apăteanu T Al., 41.
Apostol R., 89.
Appel P., 66.
Ardelea R., 41, 75, 124.
Ardelean St., 1.
Arghiriade E., 156.
Arghir I., 1
Asachi D., 52.
Aust Abbé, 93.

Bacaloglu E., 112.
Bădărău E., 75.
Bădărău G., 75.
Bădescu R., 16.
Baidaff B., 1, 25, 39, 52, 65, 156.
Bakony C., 1.
Bakony C, 15, 26, 43, 44, 54, 67, 90, 91, 92, 101, 102, 103, 104, 113, 114, 125, 126, 127, 157.
Balazs D., 1.
Bănărescu M., 1.
Banc u I., 1, 112.
Barbilian D., 66, 75, 112.
Bărglăzan A, 1, 54, 112.
Baron C., 1.
Bârlea-Suhăţeanu V., 14, 15, 26, 27, 42, 43, 67, 90, 101, 113, 125, 157.
Bârs-Sibiel D. P., 26.
Bârzu G. V., 43
Becu Crum, 42.
Begu I. S., 125.
Beju C. T., 124.
Beldie N D., 40.
Berdan C., 41, 66, 124, 127.
Berinde L. T., 125.
Beşchea N., 41, 101.
Bessel, 39.
Bey M. G, 75.
Bianu B., 66.
Biernacki M., 51.
Biggeri C., 25, 39, 52.
Bighea I., 102.
Binder J, 74.
Blasko Beatrice, 14, 41.
Blaşian V., 1.
Bobârnac M., 1.
Boerescu G. P., 157.
Boeru A. C, 76.
Boghin I., 137.
Boiangiu D., 26, 43, 102, 104, 113.
Bojin R., 137.
Boldescu P., 156.
Boleanţu L, 126.
Bolgar V. M., 41.
Bonea I., 1.
Bordeianu A., 26.
Borneas M., 14, 26, 42, 54, 67, 76, 90, 113, 114.
Borş C, 13, 107, 137.
Bosic V., 137.
Botea N., 41, 66, 75, 101, 112.
Botez M., 1.
Botez M., 1, 39, 51, 93, 105, 112, 128, 157.
Botez S. M, 13, 39, 65.
Brădeanu N., 15, 43, 44, 67, 90, 157.
Braiester O., 40, 75, 124.
Brăileanu I. M., 41.
Bratu Gh., 1, 51
Brezuica C. I. I., 41.
Brocard, 29, 35, 36.
Buicl u Gh., 1, 16, 28, 44, 51, 56, 66, 86, 87, 88, 92, 101, 104, 109, 112, 116, 120, 123, 124, 128, 135, 138, 140, 157.
† Bungeţeanu Preduţa, 100.
Buznea D D., 14, 15, 77, 89, 101, 102, 103, 104, 125.

Calciu G., 67, 103, 116.
Căldăraru L., 40.
Călin M. G., 40.
Câlniceanu C., 1
Câlniceanu G. G., 26, 53.
Câmpan Florica, 112.
Cândea C., 1, 65.
Cantemir A., 24, 39.
Caraianu I, 67, 102.
Capriel H., 51.
Carmichael, 23.
Carnot, 34.
Casimir E. A., 65.
Catona V., 1.
Catrina C, 25.
Cavallaro G. V., 25, 65.
Cazanachi V. P., 92, 101, 102, 103, 104, 113, 114, 115.
Centea Z., 25.
Cerchez M., 68, 80
Cerchez T., 66.
Cernat C., 15, 76.
Cernes A. M., 75.
Cernov N., 25
Cetaie C. C., 76.
Cetaţeanu St., 14, 15, 26, 42, 43, 44, 54, 68, 76, 89, 112, 115, 125, 140.
Chauchois Y., 75.
Checian Ana, 14, 26, 43, 90, 101, 102.
Chertman S M., 42, 43, 44, 66, 67, 90, 92, 101, 102, 113, 114.
Chintescu M. M., 43, 90, 101, 113, 126.
Chiser P. M., 75.

[1]) Numerele careu rmează după nume, arată paginile în care se găsesc publicate numele.

Chisini O., 38.
Christea N N., 90.
Ciceiu C., 27.
Cioc I. D., 25.
Ciorănescu I. C., 66, 112, 124.
Ciorănescu N., 66, 75
Claudian V., 1, 118.
Clebsch, 38.
Coca A., 1.
Cocea Th., 39.
Cocoş V., 25, 65
Coman A., 1, 25, 123.
Comănescu A., 1, 101.
Constantinescu G. G., 1, 39, 100.
Constantinescu Gh., 1, 75
Constantinescu I., 75.
Constantinescu N. V., 26, 27.
Contrea A., 1.
Corpaci A., 66
Coşereanu I., 112.
Coşniţă C., 13, 66, 75, 112, 124.
Costăchescu V. C., 1, 26, 52, 104, 116, 128, 140, 157.
Costăchescu N., 24
Crăiniceanu Gh. 124.
Cramer, 55, 126.
Cristea I. C., 43, 67.
Cristea I. N., 15, 26, 43, 44, 54, 67 76, 80, 101, 102, 103, 104, 113, 114, 115, 116, 128
Cristescu D., 26.
Cristescu I., 1.
Cristescu M., 44.
Cristescu V., 65.
Cristodulo N., 1, 65
Cserveny I., 1.
Csilcser E., 137.
Curcubătă D., 41.
Curea I., 1, 52, 75.

Damianof D, 67, 102, 116.
Damianof S., 14, 103, 157.
Damianov St., 116, 126.
Dănciulescu Gr. V., 26.
Dărmănescu I., 75.
Dăscălescu St H., 14, 15, 26, 27, 41, 42, 43, 66, 67, 76, 89, 90, 125.
Denciulescu D. G., 15.
Deheleanu G., 14, 27, 43, 67, 104, 125.
Deheleanu I. G., 102, 126.
Demetrescu G, 1.
Diaconescu D. I., 14, 15, 27, 41, 43, 76, 77.
Diaconescu M., 125, 126, 127.
Diaconescu V., 41.
Diaconu M. B., 41
Dimitrescu A. M., 41.
Dinescu F., 75, 112.
Dinu S. D., 26
Diophante, 72.
Dinghas A., 87.
Dirichlet, 25.
Dobrescu E. V., 156.
Dobrozemsky M., 1.
Donciu N., 65.
Dorneanu S. V., 41, 112.
Doscan G. A., 27, 42, 43, 67, 126
Drăgan G., 41.
Drăghicean M., 41.
† Drăghiceanu M. M., 66.
Drăgilă P, 67, 101, 102, 113.
Dragomir E. A., 14, 15, 26, 27, 43, 67, 90.
Dumitrescu G. I., 41, 66.
Dumitrescu I. E., 26.
Dugan C V., 41.
Dumitriu-Dada, 1.

Elie I., 66.
Enescu D. D., 27.
Enneper, 52.
Enulescu A. O., 65, 100
Enriques F., 38.
Euclid, 52.
Euler L., 118.

Fermat, 52, 72.
Florea C. Al, 41.
Florescu B. I., 39, 51.
Florescu M., 1.
Florescu M. O., 41.
Focşăneanu M I., 156.
Fourier, 52.
Franck A., 39.
Frăsineanu Maria 41.
Frătici I., 1.
Frumuşelu H. G., 26.
Furtwägler-Germain Sophie, 52

Gabrielescu C. V., 124.
Gambier M., 52.
Gârlişteanu N., 101.
Garti Y., 87.
Gătaianţu V B., 41.
Gavrilescu N. I., 41.
Gavrilian N., 39.
Georgescu B., 15, 76, 80.
Georgescu D., 1.
Georgescu I, 41, 101.
Georgescu Val N. I., 41, 101.
Gheorghiu A. A., 43.
Gheorghiu Ad., 123.
Gheorghiu C., 25, 52
Gheorghiu T. G., 1, 13, 24, 39, 44, 51, 52, 56, 66, 112, 114, 127.
Gheorghiu V., 1.
Ghermănescu M., 1, 13, 65, 66, 112, 137, 138, 140.
Ghişoiu I. P, 40, 53, 66.
Ghiţescu Sp., 1.
Ghiţescu P., 51.
Ghiţescu V., 156.
Gligor N I., 15 ,26, 27, 42, 43, 44, 67, 76, 90, 101, 102, 104, 113, 125, 126, 157.
Gloden A., 1, 13, 23, 25, 36, 39, 51, 54, 56, 64, 73, 83, 84, 99, 109, 116, 121, 124, 128, 156, 157.
Goga Fl., 90, 101, 103, 116, 157.
Gonzalez M. O., 156.
Goormaghtigh R., 137.
Gradin G., 26, 66
Grecu M. C., 40.
Grigorescu L. I., 124.
Grofşoreanu I. G, 41, 101.
Grubermann I. G. 41, 101.
Grumăzescu M., 43, 89, 94, 116, 128.
Guţu I. A., 137.

Hadamard, 51
Hermann I. C., 26, 27, 42, 43, 54, 67, 90, 102, 113.
Hermite, 123.
Hirsch A. I., 137.
Holwech, 66.
Hôspital, 142.
Hristea H, 1.
Hulubei H., 75.

Iacob C., 39, 123.
Iacob S. E., 41, 101.
Iliescu M., 66.
Iliescu S V., 101.
Iliuţă I. I., 41.
Ioachimescu G. A., 25.
Ionescu-Biss P. H., 1.
Ionescu-Berzuica I., 66.
Ionescu-Bujor C., 1, 26, 40, 66, 75, 100, 101, 112, 124, 156.
Ionescu H., 112.
Ionescu I., 13, 14, 24, 39, 87, 123, 137, 156.
Ionescu P. H., 41.
Ionescu I. P., 66, 112, 124.
Ionescu Ţiu D C., 1, 77, 101.
Ionescu V. D., 17, 156.
Iovănescu F., 26.
Isopescu D., 51.
Ivănescu C., 1, 14, 28, 44, 65.

Jidanu I. C., 14, 15, 26, 27, 28, 41, 42, 43, 54, 56, 66, 67, 76, 90, 101, 102, 104, 113, 114, 125.

Katz L., 41.
Katz P., 124.
Kielburger M., 1.
Krauser M., 52.
Kühn I, 2.

Lagrange, 52.
Laguerre, 123.
Lalescu T., 92, 93.
Lambrino G., 2.
Lăpădatu I. V., 41.
Laplace, 52
Lateş I. V., 41.
Laţiu E., 100.
Laţiu V., 2.
Lăzărescu I. L, 14.
Lejay, 66.
Lemoin, 24, 33, 36.
Leonida D., 2.
Lepădatu M., 112, 124, 137.
Lepolszki C., 14, 15.
Lindeman, 38
Linteş I., 2, 27, 53, 66.
Liteanu G., 2.

Logofătu M. I., 15, 43, 67, 90, 102, 104, 157.
Loria G., 51.
Luca I I., 15, 26, 27, 43, 44, 67, 76, 90, 101, 102, 113, 157.
Lucovici B., 102.
Lupan A., 2.
Lupescu C., 26, 43, 54, 66, 67, 90, 102, 113.
Lupescu G. C., 41, 42
Lusin, 51.
Line Van, 52.

Macovski E., 2.
Mahreholz I., 25, 54, 56, 67, 92, 101, 102, 103, 104, 115, 116, 126.
Maior G, 127, 128, 157.
Mănescu I., 75.
Mănescu M., 156.
Manoil A., 41.
Manolache Elena, 27.
Manolescu I. N., 14, 26, 52, 66, 75, 112, 124
Mansion P., 23.
Manughevici C., 2.
Marcinkievicz I., 52.
Marcovici M. M., 41.
Mărculescu O, 2.
Mardan D., 2, 137.
Mărgărit I. N., 101, 113, 116, 126.
Mărgineanu I., 56.
Marian V., 13, 74.
Marinescu S D., 41, 101.
Marinescu I., 2.
Marinescu G. M., 66.
Markoff, 51
Mateescu S., 2.
Matei I. A., 14, 26, 66.
Matei D., 27, 76, 125.
Matei-Chintescu M., 15, 26, 27.
Mătieş I V., 65, 74.
Mayer O., 25.
Menelaus, 30.
Mereuţă M., 2, 80, 104.
Mihai Edith, 2.
Mihăileanu A. C, 15, 26, 27, 43, 54, 67, 76, 90.
Mihăileanu N N., 2, 24, 26, 39, 53, 66, 75, 76, 77, 88, 89, 100, 102, 103, 112, 124, 137.
Mihăilescu R., 137.
Mihoc G., 51, 75.
Mihoc N. O., 14, 15, 26, 27, 28, 43, 104, 113, 116, 126.
Miloia I., 2
Mioc V., 2.
Mironescu I. D., 67, 90.
Mocanu I. C., 44, 67, 90, 101, 102, 103, 126.
Modâlcă S E., 14, 15, 26, 27, 28, 43, 44, 54, 66, 67, 89, 90, 101, 102, 104, 113, 115, 116, 125, 127.
Moessner A., 25, 65, 111.
Moisil C. G., 75.
Moldovan C., 43, 76.
Mollerup 52.
Montel P, 13.
Morţun M., 26
Motaş C., 125.
Mureşan I. O., 14, 26, 77, 89, 127.
Murgu M., 90, 125.
Murgulescu Elena 2
Murgulescu G. I., 2, 100
Musta S., 16, 44, 104.
Myller A., 87.

N. M. 13, 76, 77, 89, 90, 123.
Nadaşan S., 2, 3, 17, 29, 45, 57, 65, 69, 81, 93, 100, 105, 117, 129, 141.
Naneş Cornel'a, 104, 126, 128, 157.
Naneş Gr., 2.
Neacşu V., 41.
Nedelcu G. I., 40.
Negrea A. M., 14, 15, 89, 125, 126
Nenciulescu H., 104.
Nestor G. D. 40, 75, 112, 124.
Nestor D., P. 26.
Neuberg I. 29, 66, 82.
Neumann Maria, 28, 41, 92.
Newson V. C., 39.
Nicola G., 101, 103, 157
Nicola O., 28.
Nicolae C. R., 101.
Nicolae G., 126.
Nicolau A., 2
Nicolau-Dobridor I., 75.
Nicolau P., 2.
Nicolescu M. 66, 75, 87.
Niculescu A., 112
Niculescu V., 25, 66, 137.
Niewenglowski 37
Novac V., 13, 25.
Novacu A. V. 41

Ogrin N., 2.
Onicescu O., 2, 51, 75.
Oniţiu F., 112.
Orăşeanu C, 2.
Orăşeanu G, 2.

Pamula A., 124
Panţu Z. I., 14.
Papadopol D. Elena, 26, 43, 67, 76, 102, 113
Pascal E. 25, 34, 137.
Pasqualini L., 52.
Patriciu V., 2.
Pătroianu I. M., 112, 124
Pătruţă Ch., 14, 102, 103.
Pelteţchi M., 42, 101, 102, 113, 157.
Petrescu A., 2.
Petrescu P G., 112, 124.
Petrescu R. G., 25.
Petrescu I., 75.
Petrovici D., 26.
Podariu Ad., 26
Podariu Al., 41.
Podeanu A., 41.
Polaczek F., 41.
Pompeiu D., 39, 66, 75
Popa G. I., 42, 101.
Popa I. I., 51, 52.
Popa M., 65, 125
Popescu Ad., 92.
Popescu-Zorica A., 125.
Popescu C., 28, 56, 67, 90, 103, 157.
Popescu N. C 40, 44, 101, 102, 104, 113, 114, 116, 126, 127.
Popescu D., 25, 65.
Popescu E., 2.
Popescu I., 2.
Popescu C V., 26.
Popescu A. Z. 76.
Popovici A., 124.
Popovici C. C., 41, 124.
Popovici D D., 66.
Popovici G., 125.
Popovici C. I., 101.
Popovici Th. I., 41. 66, 122, 124.
Popovici M, 43, 91, 103, 104, 126, 157.
Popovici T., 52, 75, 112, 123, 137, 156.
Popp I. E., 124.
Postelnicescu C. M. 92
Praporgescu N., 66, 100.
Preţti F., 25.
Protopopescu I., 2.
Purcar'u I, 2.
Purdilă C., 41, 101.

Racliş N. R., 2.
Radu G. I., 43, 54.
Radu M A. 124.
Rădulescu O., 89, 125.
Rădulescu R. A., 14, 27.
Rădulet R., 2, 65, 124.
Raiciu V. C, 41.
Râmniceanu I. C., 41, 75, 112.
Reicher L. H., 125.
Rezeanu M, 41.
Riccati 23.
Roibănescu C., 2.
Roman I., 101.
Roşu A., 39, 41.
Roth I A. 125.

Saegiu V. C., 15, 76.
Şandor V., 15, 26.
Săndulescu D., 25.
Săndulică R, 68.
Santalo A. R., 65.
Săruleşteanu I. E., 43, 116.
Saucuc L., 2, 65.
Savin C I., 2, 26, 41, 112, 140.
Scărlătescu D., 2.
Schapira S. C., 43, 68, 90, 102, 113, 126.
Schapira Salo, 14, 26.
Schileru I., 2.
Scorpan A, 2.
Scripa V., 41.
Scripcă L., 112.
Segal Zoe, 15.
Segal L., 75
Segal Zigu, 14, 15, 26, 27, 43, 44, 54, 67, 68, 90, 101, 113, 125.
Segărceanu D. C. 41.
Selmeneanu L. H., 26, 27, 43.
Şenchi M E., 116.
Şerban C. C., 15, 43, 44, 54.
Şerban I. C., 26, 27, 104.

Şerban M., 75
Şerban T., 41.
Sergescu P., 2, 65.
Severineanu C., 2, 100.
Silaş G, 65.
Silion G. I. 66, 124.
Silistrarianu C., 14.
Simionescu D. G., 2, 41, 65, 66, 123, 124, 137
Simon S. P., 27, 76, 101, 102, 103, 126, 157.
Simson 116, 124.
Slavov I., 15, 26, 27, 42, 43, 54, 67, 68, 76, 77, 90.
Smighelschi O., 2
Sobel S. M., 75.
Sorian O., 28, 104, 113, 140.
Spârchez Z., 41
Spătaru A., 28, 43, 54, 68, 90.
Sprinceană G. 26.
Staicu I. N., 14, 15, 27, 43, 76, 103.
Stamate I. I., 14, 15, 16, 26, 27, 28, 42, 43, 56, 66, 67, 68, 76, 89, 90, 103, 104, 113, 116, 123, 125, 140, 157
Stamatescu I., 2.
Stamatiu M. 41.
Stambuleanu A., 2.
Stan A., 2
Stan I. A., 26, 75.
Stan C., 26.
Stăncescu C., 2, 100.
Stănciulescu I. C., 100.
Stănescu I. A., 41, 101.
Stănescu D D., 66.
Ştefănescu E., 112, 137.
Ştefănescu F. M., 26, 27, 41, 54, 66, 76, 89, 90, 125.
Ştefănescu S. M., 42.
Ştefanovici I. M., 116.
Stern Erich, 13, 83.
Stewart 137.
Stoenescu D. M., 15, 76, 77, 125.
Stoenescu T., 89.
Stoica N A., 66, 75.
Stoicescu L., 2.
Stoicescu M., 2.
Stoicescu T., 41.
Stoilov S, 39, 66, 75.
Süli M., 26.
Szpileraju, 51.

Ţarălungă S., 113, 114, 127, 140.
Ţanovici V C. 41, 101.
Tărăbuţă C. P., 40, 66, 101, 124.
Taraş V., 41, 75, 101, 124, 137.
Tătaru A., 14, 26, 27, 42, 43, 54, 67, 68, 76, 90.
Teleki S., 13.
Teodorescu C., 2, 66.
Teodorescu M. D 66, 124, 127, 157.
Teodorescu N., 40, 75, 137.
Teodosiu A., 2.
Thébault V., 13, 26, 28, 39, 41, 66, 81, 82, 83.
Tică P. M. Gall, 26, 28, 43, 68, 90, 101, 102, 103, 104, 126, 127.
Tilică C S., 14, 15, 27, 28, 41, 42, 43, 44, 54, 67, 68, 76, 77, 90, 101, 102, 104, 113, 114, 116, 125, 126, 157.
Ţino O., 2, 3, 29, 45, 57.
Ţiţeica G., 13, 24, 39, 51, 52, 66, 75, 137.
Ţiţeica Ş., 66.
Todoran G. G., 14, 28.
Topălescu G, 68.
Toscano L., 123.
Trică S. I., 14.
Tucker 32, 33.
Turcu R. S., 89.

Ulea C T., 41.

Văduva F. M., 15, 26, 27, 43, 44, 66, 67, 68, 90, 92, 102, 113, 114, 126, 127, 157.
Vâlcovici V., 2, 13, 75.
Vasilescu B., 124.
Vasiliu C. V I., 41, 66, 124.
Vasiliu G., 41, 66, 75, 137.
Vasu V., 16, 28.
Vanbon, 65.
Verrier Le, 51.
Venter D., 14, 26, 27, 42, 43, 54, 67, 67, 68, 90, 101, 102, 103, 114, 157.
Vescan T, 2, 13, 25, 65, 66.
Vessiot, 107 108.
Viciu A., 2.
Vijelie G. E., 15, 26, 28, 43, 44, 68, 76, 90, 92, 101, 102, 103, 115, 157.
Vişa E., 2, 8, 16, 19, 23, 48, 55, 61, 69, 72, 74, 78, 80, 90, 115.
Vivanti G., 25
Vlad I. V., 2.
Vlădea I., 41.
Vlădescu I., 2.
Vladimirschi V., 26
Vlăduţiu S., 124.
Volnea R. P., 112.
Vrânceanu G., 75.
Voştinariu G., 103, 116, 157

Weingarten, 107.
Weiss S., 112.
Winkler A., 26, 75.

Zaigaican I., 26.
Zaharia N. O, 2, 25, 41.
Zamfirescu G. I., 26, 41, 80.
Zapan G., 2.
Zervos P., 65.

Nota Redacţiei. Tabla de materii a fost întocmită de d-l Inspector *Vasile Mioc*, asistent la Şcoala Politechnică, căruia îi aducem vii mulţumiri.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XXI, care începe la 15 Martie 1941.

5 lei